

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلٰى مُحَمَّدٍ وَّآلِ مُحَمَّدٍ وَّعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

## ریاضی و آمار (۳)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی – علوم و معارف اسلامی

راهنمای معلم

پایه دوازدهم  
دوره دوم متوسطه

دانلود سوالات آزمون

راهنمای کامل آزمون



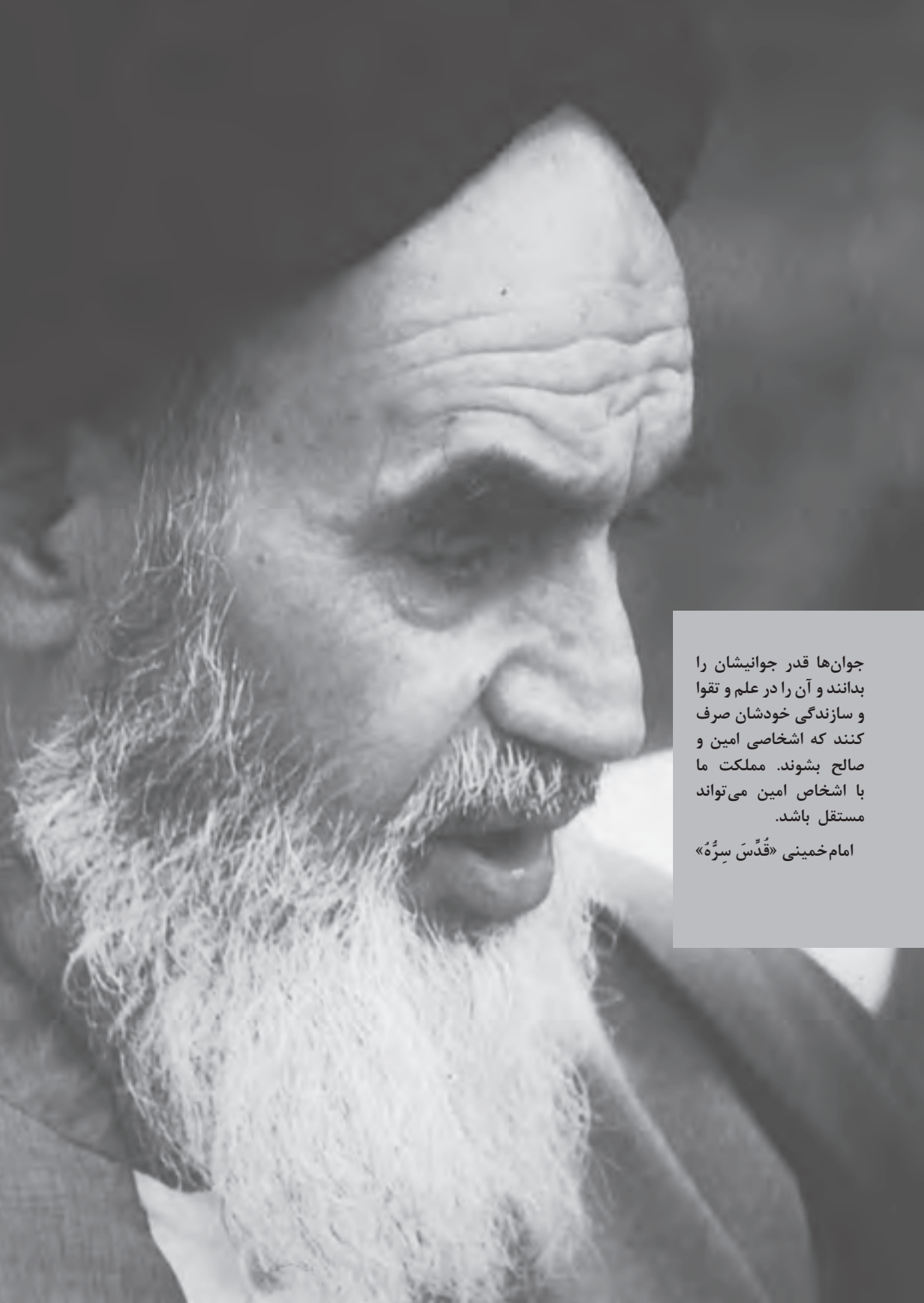
وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

- نام کتاب: راهنمای معلم ریاضی و آمار (۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۳۹۳
- پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
- مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
- شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، فریبا جباری، آزادبه حسین فرزانه، میرشهرام صدر، حسین میرزایی و با همکاری آزاده قاهری و عادل محمدپور در بخش آمار (اعضای گروه تألیف)
- مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
- شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - مهلا مرتضوی (صفحه‌آرا)
- نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)  
تلفن: ۸۸۸۳۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹  
وبگاه: [www.irtextbook.ir](http://www.irtextbook.ir) و [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)
- ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
- چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
- سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول ۱۳۹۸

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۳۷۷-۲

ISBN: 978-964-05-3377-2



جوان‌ها قدر جوانیشان را  
بدانند و آن را در علم و تقوا  
و سازندگی خودشان صرف  
کنند که اشخاصی امین و  
صالح بشوند. مملکت ما  
با اشخاص امین می‌تواند  
مستقل باشد.

امام خمینی «قُدّس سرّه»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

# فهرست

فصل ۱- آمار و احتمال.....	۱
درس ۱: شمارش.....	۱۰
درس ۲: احتمال.....	۱۹
درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل.....	۳۱
فصل ۲- الگوهای خطی.....	۴۹
درس ۱: مدل سازی و دنباله.....	۵۸
درس ۲: دنباله حسابی.....	۷۲
فصل ۳- الگوهای غیر خطی.....	۸۳
درس ۱: دنباله هندسی.....	۸۹
درس ۲: ریشه $n$ ام و توان گویا.....	۱۰۱
درس ۳: تابع نمایی.....	۱۰۶

## پیشگفتار

کتاب ریاضی و آمار (۳) پایه دوازدهم رشته انسانی در جهت اهداف برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی دوره اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام دادن محاسبات بود. در رویکرد جدید، ضمن توجه به این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. در واقع رویکرد «آموزش برای حل مسئله» به «آموزش از طریق حل مسئله» تغییر کرده است. رسیدن به چنین هدفی، مشکلات و دشواری‌های فراوانی دارد و به سرعت امکان‌پذیر نیست ولی مدّ نظر قرار دادن آن می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. در این میان، اصلی‌ترین و مؤثرترین وظیفه بر عهده معلم قرار دارد. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلم با برنامه‌های جدید ستودنی است. بر این اساس، مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند برای انجام وظیفه خویش در مورد آموزش معلمان، ضمن اطلاع‌رسانی مناسب و به‌هنگام درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی مربوط را به موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب حاضر از سه بخش اصلی «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین» و نیز مثال‌های حل شده و توضیحات به صورت متنی، نکات مهم و تعاریف، تشکیل شده است. آنچه در هر «فعالیت» به طور عمده مدّ نظر بوده آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درس و سهیم بودن آنان در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل محلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح راه حل، مرتب کردن، قضاوت در مورد یک راه حل و مقایسه راه‌حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها ساده و آسان نیست و صد البته، اجرای مناسب آن ارزش زیادی دارد. فعالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند؛ بنابراین معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزان خود، یک فعالیت را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحات بیشتر و ایجاد تغییراتی، آن را ساده‌تر نماید و حتی فعالیتی مکمل در جهت آموزش همان مفهوم درسی طراحی کند.

مؤلفان در کتاب ریاضی و آمار (۳) بر این باورند که استفاده از مثال‌ها و مسائل کاربردی که رابطه‌ای با شاخه‌های مختلف رشته علوم انسانی داشته باشد می‌تواند علاوه بر ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضی و آمار به پرورش تفکر ریاضی در آنها کمک کرده طوری که در مواجهه با مسائل و مشکلات روزمره از این ذهنیت استفاده لازم را برده و در آینده افرادی خلاق، متفکر و با قدرت تجزیه و تحلیل و دلسوز برای خدمت به جامعه و ایران اسلامی تربیت شوند.

هنگام انجام دادن فعالیت‌ها، هدایت گفت‌وگوی کلاسی یا گفت‌وگوهای ریاضی، که در آن دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از اندیشه‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهده معلم است. به طور خلاصه، فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری و فرصت دادن به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دل‌مشغولی‌های همکاران عزیزمان

باشد. «کار در کلاس» با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی، تعمیم یادگیری طراحی شده و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در انجام آن داشته باشند. مثال‌ها توسط همکاران محترم در کلاس بررسی شده و سعی می‌شود تا همانند کار در کلاس‌ها دانش‌آموزان به حل و بررسی آنها مشغول باشند و روی نکات مهم و تعاریف که عمده‌تاً در داخل کادرهایی قرار دارند از طرف دبیران محترم تأکید لازم انجام خواهد پذیرفت. حل «تمرین»‌ها به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ضرورت دارد که معلم زمینه را برای طرح پاسخ‌ها و بررسی آنها در کلاس فراهم سازد.

گروه تألیف، آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی<sup>۱</sup> دارد. به علاوه، بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه داده شده قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همت شما دبیران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

مؤلفان





# فصل ۱

## آمار و احتمال



روستای مشکله - استان گیلان (شهرستان املش)

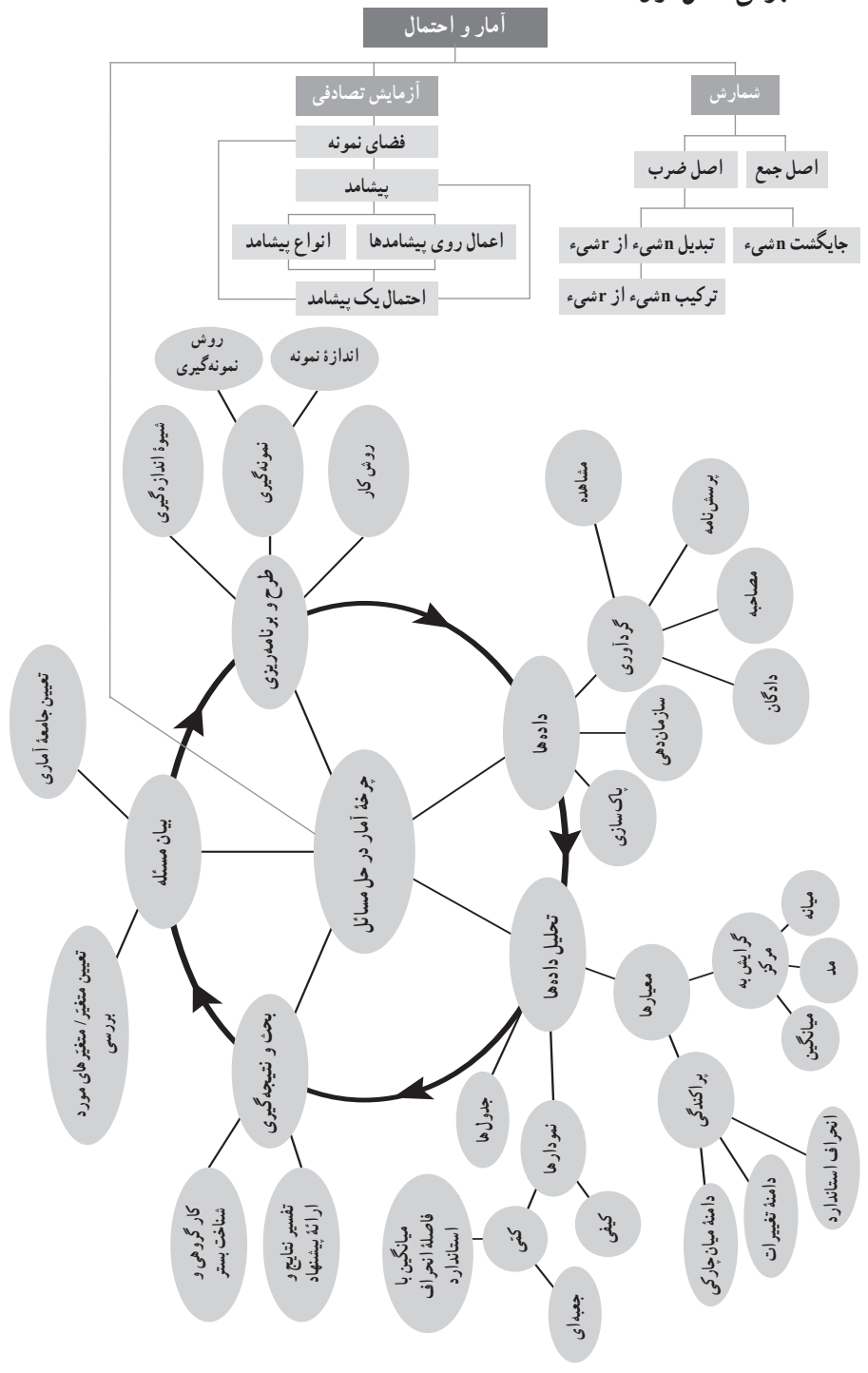
## نگاه کلی به فصل

فصل ۱ کتاب ریاضی پایه دوازدهم به مبحث آمار و احتمال اختصاص یافته است. این فصل شامل سه درس است. در درس اول مفهوم شمارش مطرح می‌شود و شامل قواعد اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت، تبدیل و ترکیب است، که هر یک از این قواعد در نظریه احتمال نقش اساسی ایفا می‌کنند. در درس دوم با استفاده از مفاهیم پدیده تصادفی، فضای نمونه، پیشامد، اعمال روی پیشامدها و مفهوم احتمال تشریح می‌گردد و در درس سوم مفهوم چرخه آمار و مسائل مربوط به آن بیان می‌شود.

آمار و احتمال به عنوان دو علم، مدل‌هایی را در اختیار قرار می‌دهند که برای مطالعه عدم حتمیت‌ها به کار می‌روند. انتخاب کالایی از محصولات یک کارخانه، عدد رو شده در پرتاب یک تاس، وضعیت آب و هوا و... همه مواردی از وجود عدم قطعیت هستند. بررسی این گونه مسائل به شمارش تعداد حالات رخدادها مربوط می‌شود. در حقیقت بسیاری از مسائلی را که ما تحت عنوان عدم حتمیت یا همان احتمال مطرح می‌کنیم، می‌توانیم با استفاده از اصول و قواعد شمارش به سادگی بررسی کنیم.

در این فصل، هر مبحث درس با فعالیتی آغاز می‌شود، سپس با نتیجه‌گیری از حل فعالیت، قوانین آن را گفته و سؤالات متنوعی ارائه شده است.

# نقشه مفهومی فصل اول



ترکیبیات (آنالیز ترکیبی) یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که سریعاً در حال رشد می‌باشد. یکی از علل رشد سریع ترکیبیات، ورود کامپیوتر در صحنه علم و جامعه است. روش‌های ترکیبیاتی فقط کاربرد ریاضی یا فیزیکی ندارند، بلکه در علوم دیگر مانند اجتماعی و بیولوژی نیز کاربرد دارند. ریاضی‌دانان چینی، هندی و یونانی از قرن نخست میلادی با فرمول‌های مربوط به آرایش‌ها و ترکیب‌ها آشنایی داشتند. ترکیبیات ارتباط تنگاتنگ با نظریه احتمالات دارد و در قرون هفدهم و هجدهم، بسیاری از ریاضی‌دانان اروپایی به مطالعه احتمالات ترکیبیاتی پرداخته بودند.

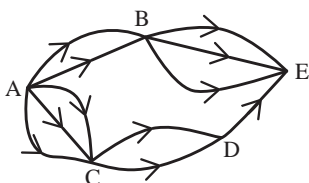
در آنالیز ترکیبی یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصول جمع و ضرب برای شمارش استفاده می‌شود، حال آنکه شمارش می‌تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. یکی از این ابزارها گراف‌های جهت‌دار و ماتریس‌های مجاورت وابسته به این گراف‌ها، توأم با اصل ضرب است. همچنین از اصولی چون اصل لانه کبوتری و اصل شمول و عدم شمول نیز می‌توان برای شمارش و حل مسائل شمارشی در آنالیز ترکیبی استفاده نمود.<sup>۱</sup>

بازی‌هایی که متکی بر شانس است، از زمان‌های بسیار دور رایج و متداول بوده است. در حفاری‌های مربوط به باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانس مشاهده شده است. با این شواهد به نظر می‌رسد که نوعی تصور خام از احتمال در تصمیم‌گیری‌ها مؤثر بوده است. در آغاز نخستین بحث‌های صوری ریاضی در احتمال، اغلب نویسندگان، کاردانو را نخستین نویسنده در احتمال معرفی می‌کنند. اثر او کتابی با نام «بازی‌هایی با تاس» است. کارهای اولیه ریاضی‌دانان در زمینه تئوری احتمال از قرن هفدهم شروع شد. با توجه به پیشرفت در زمینه ریاضیات به ویژه در احتمال، آغاز قرن بیستم، دوران احتمال مدرن نام گرفت. در این دوره، ریاضی‌دانان به خوبی آگاه بودند که در احتمال، عوامل تجربی بیشتر از علوم قدیمی‌تر مانند هندسه و آنالیز دخالت دارند. در نتیجه بحث‌های جدی که در این زمینه آغاز شده بود، کولموگروف موفق به کشف بزرگ خود شد. او توانست احتمال را بر اساس اصول موضوعی در قالب تئوری اندازه بنا نهد. از او کتابی به نام «مبانی تئوری احتمال» در آلمان به سال ۱۹۳۳ منتشر شد و پایه بنای تئوری احتمال مدرن شد.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جا‌های خالی را کامل کنید.

- (الف) اگر بتوان کاری را به دو روش مجزا از هم انجام داد و در روش اول  $m$  طریق و در روش دوم  $n$  طریق وجود داشته باشد، طبق اصل ..... می‌توان آن کار را به ..... طریق انجام داد.
- (ب) اگر کاری شامل دو مرحله باشد و انجام مرحله اول به  $m$  طریق و برای هر کدام از این  $m$  طریق، مرحله دوم به  $n$  طریق انجام پذیر باشد، طبق اصل ..... می‌توان کل کار را به ..... طریق انجام داد.
- (پ) با حروف کلمه flower می‌توان ..... کلمه شش حرفی با معنای بی‌معنا، بدون تکرار حروف ساخت.
- (ت) حاصل  $9 \times 10 \times 11$  با استفاده از نماد فاکتوریل برابر با ..... است.
- (ث) حاصل عبارت  $!(2! + 1! + 0!)$  برابر ..... می‌شود.
- (ج) تعداد مثلث‌هایی که با ۵ نقطه روی محیط دایره می‌توان ساخت، برابر ..... است.
- (چ) حاصل  $P(n, n)$  برابر ..... و حاصل  $C(n, n)$  برابر ..... می‌باشد.
- (ح) شکل زیر نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای  $A, B, C, D, E$  است و همه جاده‌ها یک طرفه‌اند، به ..... طریق می‌توان از شهر  $A$  به شهر  $E$  رفت.



۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$\text{(الف)} \quad \left(\frac{3}{5}\right)! = \frac{3!}{5!}$$

$$\text{(ب)} \quad \frac{2!}{0!} = \text{تعریف نشده}$$

$$\text{(پ)} \quad 0! + 0! + 1! + 1! = 4!$$

- (ت) تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 10\}$  که حتماً شامل عدد ۵ باشد، برابر  $C(10, 4)$  می‌باشد.

(ث) تعداد حالت‌های انتخاب نفرات اول تا سوم از بین ۲۵ دانش آموز برابر  $P(25, 3)$  می‌باشد.

$$\text{(ج)} \quad (4!)^2 = 16!$$

$$\text{(چ)} \quad 7! = 7 \times 6!$$

$$\text{(ح)} \quad \frac{10!}{5!} = 2!$$

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

(الف) با ارقام ۳، ۹، ۸، ۷ و ۴ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

۱۲۰ ۱      ۴۶۲ ۲      ۵۶۴ ۳      ۶۲۵ ۴

(ب) با ارقام ۱، ۰، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۴۰ ۱      ۶۰ ۲      ۸۰ ۳      ۱۲۰ ۴

(پ) سه کتاب متمایز ریاضی و دو کتاب متمایز اقتصاد را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتاب های هم موضوع همواره کنار هم باشند؟

۲۴ ۱      ۱۲ ۲      ۱۲۰ ۳      ۶۰ ۴

(ت) به چند طریق می توان ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه را در یک خط مرتب کرد به طوری که مهره های سفید کنار یکدیگر باشند؟ (همه مهره ها متمایزند.)

۴۸ ۱      ۳۶ ۲      ۲۴ ۳      ۱۲ ۴

(ث) پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت \_\_\_\_\_ تهران است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است. در سری ب و در تهران چند پلاک می توان ساخت که با رقم فرد شروع شود و به رقم زوج ختم شود؟

۱۱۶۶۴ ۱      ۱۴۵۸۰ ۲      ۱۵۴۸۰ ۳      ۱۸۲۲۵ ۴

(ج) با جایگشت ارقام ۶، ۵، ۵، ۲ و ۱ چند عدد پنج رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان ساخت؟

۱۸ ۱      ۲۰ ۲      ۲۴ ۳      ۳۰ ۴

(چ) دانش آموزی باید به ۱۸ سؤال از ۲۰ سؤال امتحانی به دلخواه پاسخ دهد، به چند طریق می تواند این ۱۸ سؤال را انتخاب کند؟

۱۸ ۱      ۲۰ ۲      ۱۹۰ ۳      ۳۸۰ ۴

(ح) در یک پرواز داخلی، ۴ جای خالی در هواپیما است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند، به چند طریق می توان از بین آنان ۴ نفر را سوار کرد؟

۵۶ ۱      ۶۳ ۲      ۱۱۲ ۳      ۱۲۶ ۴

(خ) به چند راه مختلف، از بین ۸ نفر دوندۀ در یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می توانند مشخص شوند، بدون آنکه هیچ دو نفری هم زمان به خط پایان برسند؟

۶۳۳ ۱      ۳۳۶ ۲      ۲۳۶ ۳      ۳۲۶ ۴

۴ حاصل عبارات ستون الف را با ستون ب جور کنید.

الف	ب
$(0! + 0! + 0! + 0!)!$	۳۶
$6 \times 20 \times 42$	$8!$
$\frac{9!}{7! \times 2!}$	۶
$1! + 2! + 3!$	$7!$
$24 \times 56 \times 30$	۹

۵ با حروف کلمه CHAIR،

الف) چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه سه حرفی بدون تکرار می توان نوشت؟

پ) چند کلمه سه حرفی می توان نوشت به طوری که شامل حرف A باشد؟

۶ در جعبه ای ۵ مهره سبز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره سفید وجود دارد، به چند طریق می توان تصادفی ۳ مهره

از این جعبه خارج کنیم به طوری که،

الف) هر سه مهره سبز باشند.

ب) هر سه هم رنگ باشند.

پ) فقط دو مهره آبی باشد.

ت) حداقل یک مهره سبز باشد.

ث) حداکثر دو مهره آبی باشد.

ج) هیچ یک از مهره های خارج شده سفید نباشد.

۷ مجموعه  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  مفروض است،

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد سه رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد چهار رقمی فرد بزرگ تر از ۵۰۰۰ (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

پ) چند عدد سه رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

ت) مجموعه A چند زیر مجموعه چهار عضوی دارد؟

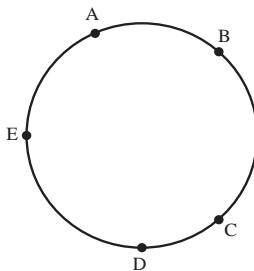
ث) مجموعه A چند زیر مجموعه چهار عضوی و شامل رقم ۳ دارد؟

ج) مجموعه A چند زیر مجموعه پنج عضوی فاقد ارقام ۲، ۴ و ۷ دارد؟

- ۸ شش نفر که دو نفر آنها با هم برادرند در یک ردیف می‌ایستند،  
 الف) به چند طریق دو برادر می‌توانند در کنار هم باشند؟  
 ب) به چند طریق دو برادر می‌توانند در اول و آخر صف واقع شوند؟

۹ با نقاط روی شکل،

- الف) چند بردار می‌توان رسم کرد؟  
 ب) چند مثلث می‌توان رسم کرد که  $B$  یک رأس آن باشد؟



- ۱۰ پنج دانش آموز پایه دوازدهم و چهار دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار بگیرند به طوری که دانش آموزان پایه دوازدهم کنار هم و دانش آموزان پایه یازدهم کنار هم باشند؟

۱۱ در هر یک از روابط زیر مقدار  $n$  را به دست آورید.

الف) $(n-4)! = 24$	ب) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$	پ) $p(n, 3) = 2p(n-1, 3)$
ت) $C(n, n-2) = 6$	ث) $C(n, 2) + p(n, 1) = 15$	

- ۱۲ به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانش آموز، ۵ دانشجو و ۴ کارمند، کمیته‌ای سه نفری تشکیل داد به طوری که افراد انتخاب شده:
- الف) دارای شغل‌های متمایز باشند.  
 ب) دو نفر دانش آموز باشند.  
 پ) حداقل دو نفر دانش آموز باشند.  
 ت) حداکثر دو نفر دانش آموز باشند.



۱۳ از دانش آموزان یک کلاس ۲۵ نفره پایه دوازدهم رشته علوم انسانی، به چند طریق می توان ۳ نفر را برای فعالیت فوق برنامه مدرسه انتخاب نمود به طوری که یک نفر مجری برنامه، یک نفر مسئول گروه نمایش و یک نفر مسئول گروه سرود شود؟

۱۴ به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال یازدهم و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوازدهم را در یک قفسه چید؟

۱۵ بین شهرهای  $A$  و  $B$ ، چهار جاده دو طرفه و بین شهرهای  $B$  و  $C$ ، سه جاده دو طرفه موجود است، به چند طریق می توان به کمک این جاده ها از شهر  $A$  به شهر  $C$ ، به کمک گذشتن از شهر  $B$ ، سفر کرد؟

۱۶ با حروف کلمه «زیستگاه» و بدون تکرار حروف،

(الف) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که به حرف «ه» ختم شود؟

(پ) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «الف» و «ه» کنار هم قرار بگیرند؟

(ت) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «زیست» چهار حرف اول باشند؟

(ث) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «زیست» کنار هم باشند؟

(ج) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

(چ) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که حرف اول آنها نقطه دار نباشد؟

(ح) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که به «گاه» ختم شوند؟

۱۷ مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن برابر باشد با :

$$\text{الف) } 3^2 + 2^3 \quad \text{ب) } \binom{5}{3} \times \binom{4}{2} \quad \text{پ) } \binom{5}{3} + \binom{4}{2}$$

## شمارش

## اهداف درس اول

- ۱ آشنایی با برخی روش‌های شمارش
- ۲ آشنایی با مفاهیم اصل جمع و اصل ضرب و به‌کارگیری آنها در حل مسائل
- ۳ آشنایی با نماد فاکتوریل و توانایی محاسبه مسائل شامل آن
- ۴ به‌کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت
- ۵ آشنایی با مفهوم جایگشت و به‌کارگیری آن در حل مسائل
- ۶ به‌کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم تبدیل
- ۷ آشنایی با مفهوم تبدیل و به‌کارگیری آن در حل مسائل
- ۸ به‌کارگیری اصل ضرب و مفهوم تبدیل برای رسیدن به مفهوم ترکیب
- ۹ آشنایی با مفهوم ترکیب و به‌کارگیری آن در حل مسائل
- ۱۰ توانایی طرح مسائلی که پاسخ آنها با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب است.

## روش تدریس

از حوزه ترکیبیات، «شمارش» به عنوان یکی از مباحث مهم ترکیبیاتی محسوب می‌شود. یکی از مسائلی که ترکیبیات را از دیگر شاخه‌های ریاضی متمایز می‌کند این است که آموختن آن نیاز به اطلاعات خاصی از ریاضیات ندارد و ماهیت اکثر مسائل ترکیبیاتی، به‌گونه‌ای است که دانش‌آموزان، در سطوح مختلفی از دانش ریاضی، امکان اقدام به حل آن را دارند. تنوع مسئله‌های شمارشی، بسیار زیاد است و دانش‌آموزان در دوره اول متوسطه تا حدودی با مسئله‌های شمارشی آشنا شدند.

موضوع این درس، معرفی برخی ابزارها برای شمارش است، بدون اینکه نیاز به شمردن تک‌تک اشیاء باشد و این ابزارها اصل جمع، اصل ضرب، جایگشت، تبدیل و ترکیب می‌باشند. در صفحه ۲، ورود به مطلب با فعالیتی آغاز می‌شود. بهتر است در ابتدای تدریس برای ایجاد انگیزه و علاقه‌مند نمودن دانش‌آموزان به موضوع درس برای یادگیری، سؤال کاربردی فعالیت کتاب که انتخاب کتاب‌های مختلف از کتابخانه مدرسه است، در کلاس مطرح شده و با روش پرسش و پاسخ به گفت‌وگو پرداخته شود و سپس دانش‌آموزان با تکمیل فعالیت کتاب، مفهوم اصل جمع را بهتر متوجه می‌شوند.

پس از فعالیت، تعریف اصل جمع گفته شده و در این تعریف بیان شد که اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است، یعنی اگر کاری را بتوان به  $K$  روش انجام داد، به طوری که در روش اول  $m_1$  انتخاب و در روش دوم  $m_2$  انتخاب و ... و در روش  $k$ ام  $m_K$  انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر  $m_1 + m_2 + \dots + m_K$  روش وجود دارد. مثالی در صفحه ۳ برای درک این موضوع مطرح شده است.

فعالیت صفحه ۳، سؤالی کاربردی است و برای اینکه مسئله ساده تر حل شود از نمودار درختی برای نشان دادن تعداد حالات ممکن برای انجام کار استفاده شده است که دو مرحله ای بودن انجام کار را نشان می دهد. دانش آموزان پس از تکمیل فعالیت، با روش دیگری برای شمردن که اصل ضرب نام دارد، آشنا می شوند. سپس تعریف اصل ضرب گفته شده و در این تعریف بیان شد که اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است، یعنی اگر انجام کاری شامل  $k$  مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول  $m_1$  روش و برای انجام مرحله دوم  $m_2$  روش و ... و برای انجام مرحله  $k$ ام  $m_K$  روش وجود داشته باشد، (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش های آن مرحله ممکن باشد)، برای انجام کار مورد نظر  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_K$  روش وجود دارد. مثالی برای درک این موضوع در ادامه درس مطرح شده است.

کارد در کلاس صفحه ۴، مسئله ای از دنیای واقعی و قابل درک برای دانش آموزان است. این مسئله ترکیبی از اصل جمع و اصل ضرب می باشد. هدف از این کارد در کلاس این است که دانش آموزان به تفاوت اصل جمع و اصل ضرب پی برده و همچنین فرق حرف «و» با حرف «یا» را در مسئله تشخیص دهند، یعنی اگر در سؤال گفته شود کار اول یا کار دوم یا ... انجام می شود، برای حل سؤال از اصل جمع و اگر در سؤال گفته شود کار اول و کار دوم و ... انجام می شود، برای حل سؤال از اصل ضرب استفاده کنند.

در صفحه ۵، نماد فاکتوریل معرفی می شود و برای تسلط نسبی دانش آموزان به استفاده از این نماد، چند مثال مطرح شده است. سپس فعالیتی مطرح شده که با استفاده از اصل ضرب، به مفهوم جایگشت  $n$  شیء متمایز می رسد. جایگشت در قلمرو ترکیباتی آن به معنی مرتب سازی یا تغییر ترتیب اعضای یک مجموعه است. ممکن است این چیدمان خطی یا غیرخطی باشد که در هر مورد، تعداد طرق چیدن اعضا اهمیت دارد. قابل توجه است که در این درس، جایگشت خطی مدنظر است. اگر  $n$  شیء متمایز در کنار یکدیگر در یک ردیف (صف) قرار گیرند، جایگشت خطی می باشد.

برای حل مسائلی مانند سؤال کارد در کلاس صفحه ۶، بهتر است مانند کتاب با رسم مربع ها یا خط هایی، موقعیت هر رقم را برای دانش آموزان مشخص نمود و تعداد حالات ممکن انتخاب هر رقم را در آن نوشت و سپس اعداد مندرج در آنها را در یکدیگر ضرب کرد. نکته ای که در این گونه سؤالات قابل توجه می باشد محدودیتی است که عدد صفر ایجاد می کند، بهتر است ابتدا موقعیت مربع متناظر آن بررسی شده و سپس به سایر پرداخته شود. همان طور که در قسمت ۱ این کار در کلاس اشاره شده است، رقم اول از سمت چپ نباید صفر باشد، بهتر است برای درک بهتر دانش آموزان مثالی زده شود مثلاً عدد ۳۲۱۵. عددی پنج رقمی نیست.

به دانش‌آموزان تأکید شود که برای حل سؤالات شمارشی، به متن سؤال دقت داشته باشند. چون این سؤالات به ظاهر شباهت‌هایی دارند ولی اگر به متن سؤال توجه کنند متوجه شرط‌هایی که در آن قید شده، می‌شوند. در قسمت‌های دیگر این کار در کلاس ساخت اعداد ۵ رقمی فرد یا زوج خواسته شده، در این صورت ابتدا شرایط خواسته شده را ایجاد می‌کنیم، یعنی برای زوج یا فرد بودن اعداد، ابتدا باید شرایط رقم یکان را مشخص کرده و سپس شرایط اولین رقم سمت چپ و پس از آن تعداد حالات ارقام میانی شمرده می‌شود.

در صفحه ۷، فعالیتی مطرح می‌شود که با استفاده از اصل ضرب، مفهوم تبدیل یا جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء را بیان می‌کند و فرمول مربوط به آن معرفی می‌شود. هدف از این فعالیت این است که دانش‌آموزان شباهت جایگشت و تبدیل را درک کنند.

در صفحه ۸، رابطه تبدیل یا جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء با اثباتش بیان شده است، تا سطح مطلوبی از یادگیری در دانش‌آموزان ایجاد گردد و بتوانند نحوه به‌کارگیری اصل ضرب را در رسیدن به رابطه تبدیل درک کنند. همچنین تأکید می‌شود که در تبدیل، جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم است.

فعالیت صفحه ۸، برای بیان مفهوم ترکیب مطرح شده و حالت‌های متفاوت این سؤال که تشکیل زیرمجموعه‌های سه عضوی است، در جدول صفحه ۹ نشان داده می‌شود.

جدول صفحه ۹ نشان می‌دهد که در هر ستون، جابه‌جایی اعضای مجموعه‌هایی اثر است و ترتیب انتخاب در آن مهم نیست. همچنین نشان می‌دهد که با استفاده از اصل ضرب و رابطه تبدیل، رابطه ترکیب به دست می‌آید و فرمول مربوط به آن معرفی شده و تأکید می‌شود که در ترکیب، جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم نیست. در کاردر کلاس صفحه ۹، سؤالات متنوعی مطرح شده و هدف این است که دانش‌آموزان تفاوت دو مفهوم تبدیل و ترکیب را درک نمایند و نیز تشخیص دهند که برای حل مسائل از کدام فنون شمارشی می‌توانند استفاده کنند.

## توصیه‌های آموزشی

■ برای پرورش «تفکر ترکیبیاتی»<sup>۱</sup> در دانش‌آموزان، بهتر است بعضی از مسائل را به‌طور شهودی برای آنان بیان نمود. به عنوان مثال، تعداد طرق نشستن سه دانش‌آموز روی سه صندلی خالی، که در واقع چیزی که مهم است، وضعیت افراد نسبت به یکدیگر می‌باشد، که برای نفر اول سه انتخاب، برای نفر دوم دو انتخاب و برای نفر سوم یک انتخاب وجود دارد. وقتی دانش‌آموزان مفهوم جایگشت را به‌طور شهودی می‌بینند، آن را یاد گرفته و می‌توانند در حل مسائل متنوع به‌کار گیرند یا مانند فعالیت صفحه ۸ کتاب که تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه چهار عضوی، به‌طور شهودی در

۱. در آمار بیاز، از کار با مفاهیم «تبدیل» و «ترکیب» به معنی «تفکر ترکیبیاتی» نام برده شده است.

جدول نشان داده شده است و کاملاً برای دانش‌آموزان قابل درک خواهد بود.

■ بهتر است در ابتدای درس، هر یک از دانش‌آموزان به‌طور انفرادی، با فعالیت مطرح شده در کتاب درگیر شوند و نظرات خود را در کلاس بیان کنند و با بازتاب بر نظرات یکدیگر، بحث‌ها را پیش ببرند. در این زمان، معلم نقش هدایت‌کننده بحث‌ها را خواهد داشت. سعی شود از ابراز نظر صریح خودداری گردد، مگر زمانی که یک راهنمایی مناسب بیان شود. جهت‌گیری بحث‌های کلاسی به‌گونه‌ای باشد تا زمینه را برای تعمیم مسئله یا موضوع به حالت‌های کلی‌تر فراهم کند. به این شکل، دانش‌آموزان برای ورود به مباحث بعدی، آماده می‌شوند و در آخر می‌توانند ارتباط مفهومی بین مباحث مختلف ترکیباتی را بیابند.

■ از طرح مسائل سخت و پیچیده پرهیز شود. می‌توان مسائل متنوع دیگری در محدوده مطالب کتاب درسی و در همان چهارچوب مطرح نمود تا به درک بهتر دانش‌آموزان از درس کمک نماید.

### اشتباهات رایج دانش‌آموزان

ماهیت اشتباهات دانش‌آموزان در حل مسائل ترکیباتی، هنگام رویارویی با مسئله‌های به ظاهر یکسان، نشانه بدفهمی آنان می‌باشد. بعضی دانش‌آموزان فقط فرمول حفظ می‌کنند، بدون اینکه درک درستی از مفاهیم و قواعد آن داشته باشند.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان از قبیل استفاده نادرست از نمودار درختی، تکرارهای نادرست، عدم درک درست از مفاهیم جایگشت، تبدیل و ترکیب و به کارگیری نادرست از آنها در حل مسائل می‌باشد.

بهتر است قبل از به کارگیری قواعد ترکیباتی در حل مسائل متنوع، این قواعد را با هم مقایسه کنند و تفاوت آنها را تشخیص دهند.

### حل تمرینات درس اول (صفحه ۱۰ کتاب)

۱ می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

$$10 + 11 + 12 = 33 \rightarrow \binom{33}{1} = 33$$

۲ بین پنج شهر  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$  و  $E$  مطابق شکل صفحه بعد راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر  $A$  به شهر  $C$  مسافرت کرد؟

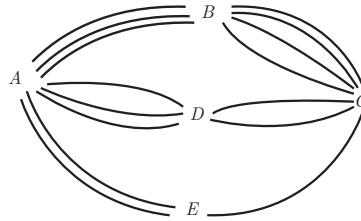
ب) از شهر  $A$  به شهر  $C$  و از طریق شهر  $B$  مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر  $D$  بدون عبور از شهر  $E$  به شهر  $A$  مسافرت کرد؟

الف)  $3 \times 4 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 20$

ب)  $12 \times 12 = 144$

پ)  $3 + 2 \times 4 \times 3 = 27$



۳ با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

الف)  $5! = 120$

ب)  $1 \times 3 \times 4 = 12$

پ)  $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 1 = 6$

۴ یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها

با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

$$p(10, 2) = \frac{10!}{8!} = 90$$

۵ یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد

تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

$$7 \times 2 \times 3 = 42$$

۶ مجموعه  $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$  مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

ب) مجموعه A چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیر مجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

الف)  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

ب)  $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

پ)  $\binom{6}{3} = 20$

ت)  $\binom{5}{2} = 10$

چون زیر مجموعه سه عضوی شامل رقم ۸ می باشد، پس دو عضو باقی مانده زیر مجموعه از پنج رقم دیگر مجموعه A انتخاب می شود.

۷ روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید :

الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

الف)  $\binom{12}{3} = 220$

ب)  $\binom{12}{2} = 66$

۸ می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم

۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم :

الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

الف)  $\binom{5}{3} \times \binom{6}{3} = 200$

یک نفر از پایه دوازدهم به عنوان کاپیتان تیم انتخاب شده است، پس از دانش آموزان پایه دوازدهم ۵ نفر باقی می ماند.

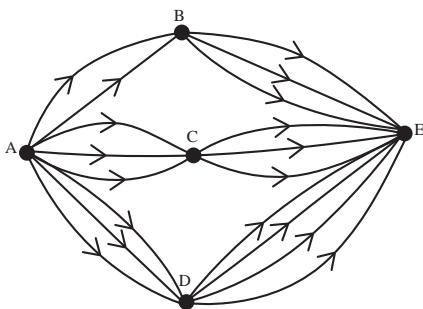
ب)  $5 + 5 = 10 \rightarrow \binom{10}{5} = 252$

$$\text{پ)} \quad \binom{6}{4} \times \binom{5}{2} + \binom{6}{5} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{6} = 181$$

$$\text{ت)} \quad \binom{5}{2} + \binom{6}{4} = 150$$

۹ مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت  $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$  باشد.

اگر شکل زیر نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای  $A, B, C, D, E$  باشد و همه جاده‌ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می‌توان از شهر  $A$  به شهر  $E$  رفت؟



۱۰ تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر  $B$  به  $C$  و از شهر  $E$  به  $A$  را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر

بتوان به  $20$  طریق از شهر  $A$  به شهر  $D$  سفر کرد.

$$2 \times 4 \times 2 + 4 \times 1 = 20$$

حالت ۱- از  $B$  به  $C$  چهارراه و از  $E$  به  $A$  یک راه باشد :

$$2 \times 3 \times 2 + 4 \times 2 = 20$$

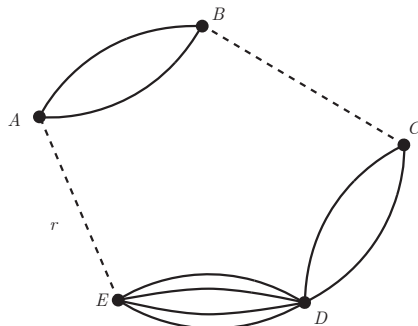
حالت ۲- از  $B$  به  $C$  سه راه و از  $E$  به  $A$  دو راه باشد :

$$2 \times 2 \times 2 + 4 \times 3 = 20$$

حالت ۳- از  $B$  به  $C$  دو راه و از  $E$  به  $A$  سه راه باشد :

$$2 \times 1 \times 2 + 4 \times 4 = 20$$

حالت ۴- از  $B$  به  $C$  یک راه و از  $E$  به  $A$  چهار راه باشد :





## تاریخچه و مفهوم احتمال

در واقع شانس و عدم قطعیت تاریخچه‌ای به درازای تمدن بشریت دارد. گفته می‌شود که شواهدی از بازی‌های شانس در ۳۵۰۰ سال قبل از میلاد به دست آمده در مصر و... و تاسی شبیه تاس کنونی در مصر به دست آمده است. متأسفانه بازی‌های شانس و تاس نقش مهمی در توسعه تئوری احتمال داشته است. تئوری احتمال به‌طور ریاضی (توسط پاسکال و فرما) در قرن ۱۷ آغاز شد که سعی در حل و به‌دست آوردن احتمال دقیق در برخی مسائل بازی‌های شانس به‌طور ریاضی داشتند. البته قبل از آنها نیز کاردان و گالیله (قرن ۱۶) به حل چنین مسائلی به‌طور عددی پرداخته‌اند.

از قرن هفدهم مرتباً تئوری احتمال توسعه یافت و در رشته‌های مختلف به‌کار گرفته شد. امروزه احتمال در اغلب زمینه‌های مهندسی و علوم مدیریت ابزار مهمی است و حتی استفاده از آن در پزشکی، رفتارشناسی، حقوق و... مطرح است.

با وجود کاربرد وسیع احتمال و علی‌رغم اینکه چنین مفاهیمی را دائماً در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم، تعریف علمی یگانه‌ای برای احتمال وجود ندارد و در طول تاریخ رشد تئوری احتمال، تعاریف مختلفی از احتمال شده است که هریک بعداً مورد انتقاد دیگران قرار گرفته است.

## تعریف کلاسیک احتمال

(توسط پاسکال در قرن ۱۷): اگر در یک آزمایش تصادفی تعداد کل نتایج ممکنه  $N$  باشد، احتمال واقعه  $A$  عبارت است از:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

## تعریف فراوانی نسبی (تعریف آماری)

این تعریف اولین بار در قرن جاری (۱۹۵۷) توسط Von Mises برای اصلاح تعریف کلاسیک معرفی شد. اگر آزمایش تصادفی را  $n$  بار انجام دهیم، برای  $n$  بزرگ داریم:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

### تعریف ذهنی Subjective

نگرش به احتمال به عنوان معیاری از میزان اعتقاد به یک امر است. مثلاً وقتی می‌گوییم فلان متهم به احتمال ۷۰٪ مجرم است، در اینجا احتمال بیانگر میزان اعتقاد ما به حقیقت یک امر می‌باشد. البته این بسیار به قضاوت کننده بستگی دارد و ممکن است با همان دلایل و مدارک شخص دیگری بگوید به احتمال ۹۰٪ مجرم است.

همه تعاریفی که تا اینجا مطرح شده اشکالاتی دارند که از آنها به عنوان مبنای یک تئوری ریاضی نمی‌توان استفاده کرد.

### تعریف اصولی Axiomatic Definition

این تعریف توسط کلموگروف ارائه شد. البته سال‌ها طول کشید تا مورد توجه قرار گیرد. در اینجا احتمال بر مبنای تئوری اندازه ارائه می‌شود و به هر واقعه عددی که احتمال آن واقعه نامیده می‌شود و باید در اصول موضوعه سه گانه صدق کند نسبت داده می‌شود. اینکه چه عددی بر هر واقعه نسبت داده شود با فرض ارضای شرایط اصول موضوعه دلخواه است و ممکن است تطابق کامل با واقعیت نداشته باشد اما با فرض صحت این احتمالات مفروض برای واقعه‌ها، با استفاده از تئوری احتمال می‌توانیم احتمال وقایع دیگر مورد نظرمان را به دست آوریم.

# احتمال

## درس دوم

### اهداف درس دوم

- ۱ یادآوری و تکمیل مفاهیم مربوط به آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی
- ۲ مشخص کردن پیشامدهای تصادفی در حالت‌های مختلف و یافتن تعداد اعضای آنها با ابزارهای شمارش
- ۳ آشنا شدن دانش‌آموزان با جبر پیشامدها و اعمال روی پیشامدها و استفاده از آنها در مسائل مربوط به احتمال
- ۴ استفاده از جایگشت، تبدیل و ترکیب در حل مسائل احتمال

### روش تدریس

این درس با معرفی آزمایش تصادفی و قطعی و تمایز بین آنها به عنوان مقدمه آغاز شده است. سپس با معرفی و تکمیل مفاهیم و اصطلاحات احتمال زمینه‌های لازم برای حل مسائل احتمال که در زندگی روزمره دانش‌آموز می‌تواند با آنها روبه‌رو شود فراهم می‌گردد.

### فعالیت صفحه ۱۲

در این فعالیت با تأکید بر قطعی نبودن برخی از پدیده‌ها زمینه لازم برای پدیده‌های تصادفی (آزمایش تصادفی) را فراهم می‌کنیم. در قسمت آخر این فعالیت از دانش‌آموز می‌خواهیم چند آزمایش تصادفی و چند آزمایش قطعی مثال بزند.

### آزمایش تصادفی

- انداختن یک لیوان در کلاس به منظور مشاهده شکسته شدن یا نشدن آن
- پرتاب سکه به منظور مشاهده قسمت روشده
- تولد فرزند به منظور مشاهده جنسیت آن

## آزمایش قطعی

- انداختن یک میخ فولادی در کلاس به منظور مشاهده شکسته شدن یا نشدن آن
- پرتاب سکه‌ای که دو طرف آن یک نقش داشته باشد.
- بیرون آوردن مهره سفید از کیسه‌ای که فقط شامل مهره‌های سفید است.

## کار در کلاس صفحه ۱۳

این کار در کلاس به منظور درک و تثبیت دو مفهوم آزمایش تصادفی و آزمایش قطعی طراحی شده است.

۱ کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

(الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم.

پاسخ: آزمایش قطعی زیرا با توجه به سن شروع تحصیل در مدارس ایران هیچ کلاس درسی پیدا نمی‌شود که در پایه دوازدهم دانش‌آموز بیشتر از ده سال نداشته باشد.

(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

پاسخ: آزمایش تصادفی زیرا نتیجه از قبل مشخص نیست.

(پ) مشاهده دو مهره سبز، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سبز وجود دارد؛

پاسخ: آزمایش قطعی زیرا بجز مهره سفید رنگ دیگری در جعبه نیست.

(ت) پیش‌بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

پاسخ: آزمایش تصادفی زیرا نتیجه از قبل مشخص نیست.

(ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی

سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟

پاسخ: آزمایش تصادفی؛ زیرا مشاهده برنده از قبل مشخص نیست.

۲ از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.

(الف) آیا مجموعه دوعضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را

نشان دهد؟

پاسخ: خیر، اما اگر منظور مشاهده جنسیت شیء خارج شده باشد پاسخ مثبت است.

(ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

پاسخ: در ادامه این کار در کلاس فضای نمونه آزمایش تصادفی به عنوان مجموعه همه حالت‌های ممکن

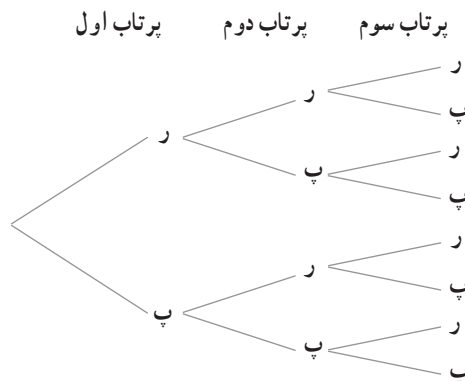
در آزمایش تصادفی معرفی می‌گردد.

## فعالیت صفحه ۱۴

در این فعالیت دانش آموز با فضای نمونه‌ای دوبعدی و سه بعدی آشنا می شود.

۱ پرتاب دو سکه باهم.

۲ پرتاب سه سکه باهم (پرتاب یک سکه سه بار)



$$S = \{(پ، پ، پ)، (پ، پ، ر)، (پ، ر، پ)، (پ، ر، ر)، (ر، پ، پ)، (ر، پ، ر)، (ر، ر، پ)، (ر، ر، ر)\}$$

۲ پرتاب یک تاس و یک سکه با هم.

$$S = \{(پ، ۱)، (پ، ۲)، (پ، ۳)، (پ، ۴)، (پ، ۵)، (پ، ۶)، (ر، ۱)، (ر، ۲)، (ر، ۳)، (ر، ۴)، (ر، ۵)، (ر، ۶)\}$$

## کار در کلاس صفحه ۱۴

۱ این کار در کلاس تمرینی است برای تسلط دانش آموز در تشخیص فضاهای نمونه‌ای با بیش از یک بعد.

۲ سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش

تصادفی را مشخص کنید. چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن،

مشخص کرد؟

پاسخ:  $3! = 6$

۲ در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا

از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

پاسخ:

$$n(s) = \binom{11}{3}$$

## پیشامد

در ادامه درس پیشامدهای یک فضای نمونه (در یک آزمایش تصادفی) را به عنوان زیرمجموعه‌های

فضای نمونه معرفی می‌کنیم. توجه داشته باشید که دانش‌آموزان این رشته تحصیلی بعد از پایه نهم دیگر ارتباطی با مفهوم مجموعه‌ها و زیرمجموعه نداشته‌اند، بنابراین یادآوری این مفاهیم ضروری است.

### کار در کلاس صفحه ۱۵

۱ سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم  $\{پ، ر\} = S$  تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

پاسخ:  $\{پ، ر\}$  و  $\{ر\}$  و  $\{پ\}$  و  $\{\}$

۲ مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان دربارهٔ دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها باهم قرار گذاشتند که یک کارت را به‌طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی  $S$  را مشخص کنید. اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعهٔ کتاب، باهم خلاصهٔ آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

پاسخ:  $S = \{\text{مریم، ملیکا و سوگند}\}$

$\{\text{مریم}\}$ ،  $\{\text{ملیکا}\}$ ،  $\{\text{سوگند}\}$ : زیرمجموعه‌های یک عضوی  $S$

اگر قرار باشد دو نفر از آنها با هم کتاب را خلاصه کنند، تمام زیرمجموعهٔ دو عضوی  $S$  را می‌نویسیم که جواب ۳ تا است.

۳ تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به‌نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{۳، ۲، ۵\} \quad B = \{۲\} \quad C = \{۲، ۴، ۶\}$$

پاسخ: هر سه

### تذکر

برای درک بهتر این مفهوم «برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع پیوندد.» کافیست به سؤال به‌صورت زیر دقت شود.

تاسی را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  را در نظر می‌گیریم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود کدام یک از پیشامدها رخ داده‌اند؟

۴ دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد روشده از دو تاس مانند هم باشد.

پاسخ:  $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

پاسخ:  $\{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

پاسخ:  $\{\}$

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

پاسخ: S

۵ در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال

دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم.

تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

$$\text{پاسخ: } \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

$$\text{پاسخ: } \binom{6}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 75 + 60 + 20 = 155$$

### اعمال روی پیشامدها

در ادامه با استفاده از اعمال روی مجموعه‌ها رخ دادن دو پیشامد (مثلاً  $A$  و  $B$ ) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$A \cup B$ : حداقل یکی از پیشامدهای  $B$  یا  $A$  رخ دهند

$A \cap B$ : هر دو پیشامدهای  $B$  و  $A$  با هم رخ دهند

$A - B$ : فقط پیشامد  $A$  رخ دهد

$A'$ : پیشامد  $A$  رخ ندهد

در ادامه دو پیشامد ناسازگار به عنوان دو پیشامدی که اشتراک آنها تهی است تعریف می‌شود.

### کار در کلاس صفحه ۱۸

۱ تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هریک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

■ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.  $\{2\}$

■ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.  $\{۲,۴,۶,۳,۵\}$

■ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.  $\{۴,۶\}$

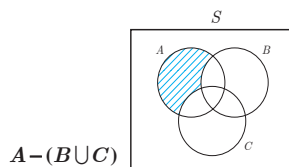
■ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.  $\{۳,۵\}$

■ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.  $\{۱,۴,۶\}$

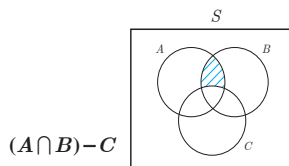
۲ فرض کنید  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  سه پیشامد در فضای نمونه  $S$  باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار

ون مانند نمونه سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را بنویسید.

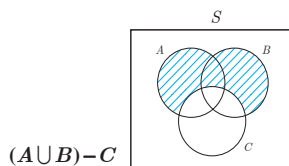
■ فقط پیشامد  $A$  رخ دهد و پیشامدهای  $B$  و  $C$  رخ ندهد.



■ پیشامدهای  $A$  و  $B$  رخ دهند ولی  $C$  رخ ندهد.



■ پیشامدهای  $A$  یا  $B$  رخ دهند ولی  $C$  رخ ندهد.



۳ خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

■ پیشامد  $A$  اینکه همهٔ فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.  $A = \{(د,د,د), (پ,پ,پ)\}$

■ پیشامد  $B$  اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

$B = \{(پ,د,د), (د,پ,پ), (پ,پ,د)\}$

■ پیشامد  $C$  اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

$C = \{(د,د,د), (د,د,پ), (د,پ,د), (پ,د,د)\}$

باتوجه به پیشامدهای  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  به سؤالات زیر پاسخ دهید:

■ آیا پیشامدهای  $A$  و  $B$  ناسازگارند؟ بله



■ آیا پیشامدهای  $A$  و  $C$  ناسازگارند؟ خیر

■ آیا پیشامدهای  $C$  و  $B$  ناسازگارند؟ بله

۴ دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

پاسخ: در پرتاب تاس پیشامد آمدن عدد زوج و پیشامد آمدن عدد فرد دو پیشامد ناسازگارند.

## فعالیت صفحه ۱۹

۱ چنان که پیشامد  $A$  نشدنی باشد، یعنی  $A = \emptyset$  در این صورت مقدار  $P(A)$  را محاسبه کنید.

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \quad \text{پاسخ:}$$

۲ در صورتی که پیشامد  $A$  حتمی باشد، یعنی  $A = S$  در این صورت مقدار  $P(A)$  را محاسبه کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1 \quad \text{پاسخ:}$$

۳ در صورتی که  $A \subseteq B$  در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq \boxed{n(B)} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \boxed{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴ با توجه به ۱، ۲ و ۳، اگر  $A$  پیشامد دلخواهی در فضای نمونه  $S$  باشد، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۵ هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه  $S$  باشند، با پرکردن جاهای خالی مقدار  $P(A \cup B)$

را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

## کار در کلاس صفحه ۲۰

۱ یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

(الف) تاس زوج بیاید  $\cdot \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(ب) سکه پشت بیاید  $\cdot \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید  $\cdot \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

(ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید  $\cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

۲ یکی تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند  $\frac{1}{12^5}$ .

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$ .

پ) تولد هیچ دوتای آنها در یک ماه نباشد  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4}$ .

۳ در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ...، ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

پاسخ: شخصی که عدد ۷ را انتخاب کرده است.

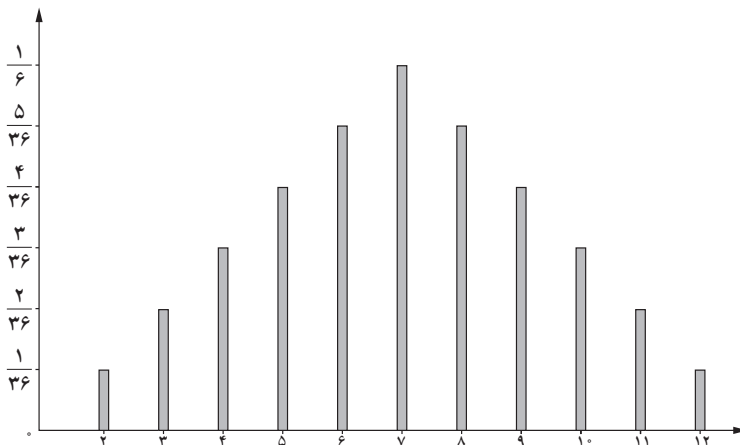
ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

پاسخ: اشخاصی که عدد ۲ و ۱۲ را انتخاب کرده‌اند.

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

پاسخ: بله، زیرا  $\frac{1}{36}$  شانس دارد.

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله‌ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



## فعالیت صفحه ۲۲

این فعالیت برای آشنا کردن دانش‌آموز با فرمول  $P(A') = 1 - P(A)$  است.

## کار در کلاس صفحه ۲۳

این کار در کلاس فعالیتی برای تثبیت فرمول  $P(A') = 1 - P(A)$  توسط دانش آموز است.

## تمرین صفحه ۲۵

۱ کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟  
الف) نام ۲۰ دانش آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به‌طور تصادفی یک کارت را بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش آموزها استخراج شود.

پاسخ: آزمایش تصادفی

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

پاسخ: آزمایش قطعی

پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانس پاسخ داده‌ایم.

پاسخ: آزمایش تصادفی

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد:  
عددی را انتخاب می‌کند.

سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.

در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

پاسخ: آزمایش قطعی

۲ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

$$S = \{(ر، ۶)، (ر، ۵)، (ر، ۴)، (ر، ۳)، (ر، ۲)، (ر، ۱)، (پ، ۶)، (پ، ۵)، (پ، ۴)، (پ، ۳)، (پ، ۲)، (پ، ۱)\}$$

ب) پیشامد  $A$  را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

$$A = \{(ر، ۶)، (ر، ۴)، (ر، ۲)، (پ، ۶)، (پ، ۴)، (پ، ۲)\}$$

۳ هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن

کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین :

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی  $S = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹\}$

ب) پیشامد  $A$  که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد  $A = \{۳, ۹, ۱۵\}$

ب) پیشامد  $B$  که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد  $B = \{۱, ۹\}$

ت) پیشامدهای  $A \cap B$  و  $A - B$  را با اعضا مشخص کنید.

$$A \cap B = \{۹\}$$

$$A - B = \{۳, ۱۵\}$$

۴ برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

الف) پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  رخ دهد.  $(A \cap B \cap C)$

ب) پیشامدهای  $A$  یا  $B$  یا  $C$  رخ دهد.  $(A \cup B \cup C)$

۵ هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲، ۳، ۴ و ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و

پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

$$S = \{۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۳۱, ۳۲, ۳۳, ۳۴, ۴۱, ۴۲, ۴۳, ۴۴\}$$

ب) پیشامد  $A$  که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

$$A = \{۱۲, ۲۴, ۴۲\}$$

پ) پیشامد  $B$  که در آن عدد روی کارت اول باشد.

$$B = \{۱۱, ۱۳, ۲۳, ۳۱, ۴۱, ۴۳\}$$

۶ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

$$S = \{(د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د)\}$$

ب) پیشامد  $A$  که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

$$A = \{(د, د, د), (د, د, د), (د, د, د)\}$$

پ) پیشامد  $B$  که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

$$B = \{(پ, پ, د), (پ, د, د), (د, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

ت) پیشامد  $C$  که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشد.

$$C = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ), (پ, د, د), (د, د, پ)\}$$

ث) پیشامد  $D$  که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

$$D = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (د, د, د), (د, د, د)\}$$

۷ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

پاسخ: ۱۶

ب) پیشامد  $A$  را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پاسخ:  $A = \{(د، د، د، پ)، (د، د، پ، پ)، (د، پ، د، پ)، (پ، د، د، د)\}$

پ) پیشامد  $B$  که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

پاسخ:  $B = \{(د، د، د، د)، (د، د، د، پ)، (د، د، پ، د)، (د، پ، د، د)، (پ، د، د، د)\}$

ت) آیا پیشامدهای  $A$  و  $B$  ناسازگارند؟

پاسخ: خیر

۸ از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم.

مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند.

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \end{pmatrix}$$

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۹ عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان

می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

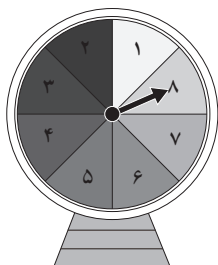
$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$



۱۰۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم ها با شماره های غیراقل در مکان های زوج باشند.

$$\frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

۱۱ یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری ببندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

$$\frac{6 \times 2! \times 9!}{11!}$$

۱۲ در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوج وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوج های نشانه دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوج نشانه دار باشند.

$$\frac{\binom{5}{0}\binom{15}{7} + \binom{5}{1}\binom{15}{6} + \binom{5}{2}\binom{15}{5}}{\binom{20}{7}}$$

۱۳ انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

$$1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{3} + \binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}$$

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}}$$

## چرخه آمار در حل مسائل

## اهداف درس سوم

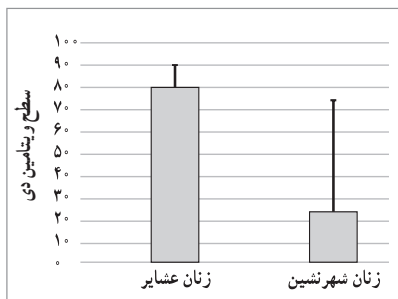
- یادآوری شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری پایه‌های پیشین
- یادآوری و درک منطق انتخاب شاخص‌ها و نمودارهای آماری
- آشنایی با چرخه حل مسائل آماری به عنوان الگویی برای آماری فکر کردن
- درک روش به دست آوردن نتایج آماری و پرسیدن پرسش‌های تعیین‌کننده با توجه به بستر و زمینه مسئله
- پرورش نگاه نقادانه به مسائل و نتایج آماری و ارائه پیشنهاد مناسب

## نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ هر یک از موارد زیر مربوط به کدام گام از چرخه آمار است؟ این موارد را براساس ترتیب گام‌ها مرتب کنید.

(الف) وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار Excel در ۳۰ سطر و دو ستون و بررسی داده‌های دور افتاده  
(ب) بررسی میزان دانش معلمان متوسطه دو، یک ناحیه آموزشی یک شهر در زمینه استفاده از رایانه و زبان انگلیسی

(پ) گزارش معیار گرایش به مرکز و معیار پراکندگی با توجه به نوع متغیر و توزیع داده‌ها  
(ت) انتخاب ۳۰ معلم ناحیه به صورت تصادفی و اندازه‌گیری دانش آنها با استفاده از دو آزمون  
(ث) از مقایسه میانگین نمرات این دو آزمون با نمره قابل قبول برای معلم‌ها به این نتیجه می‌رسیم که معلم‌های این ناحیه به آموزش ضمن خدمت در به کارگیری رایانه و ارتقای سطح زبان انگلیسی نیاز دارند.



۲ اگر در نمودار روبه‌رو بلندی مستطیل‌ها نشان‌دهنده میانگین و میله خط نشان‌دهنده انحراف استاندارد باشد درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید و توضیح دهید.

(الف) سطح ویتامین D زنان عشایر به‌طور متوسط بیش از زنان شهرنشین است.

(ب) برخی از زنان عشایر سطح ویتامین D بسیار پایین و برخی سطح ویتامین D بالایی دارند.  
 (پ) زنان عشایر به صورت همگن وضعیت ویتامین D خوبی دارند.  
 (ت) به نظر می‌رسد برخی از زنان شهرنشین با مصرف مکمل‌ها توانسته‌اند وضعیت ویتامین D خود را بهبود دهند اما برخی دیگر به دلیل سبک زندگی شهری و مواجهه کم با نور خورشید وضعیت خوبی ندارند.

۳ در یک مدرسه متوسطه دو می‌خواهیم بدانیم دانش‌آموزان از بوفه مدرسه چه خوراکی‌هایی می‌خرند و از این طریق به صورت متوسط روزانه چند کالری دریافت می‌کنند.  
 (الف) با تعیین متغیر مورد بررسی مسئله را به صورت شفاف تعریف کنید.  
 (ب) جامعه آماری و نمونه را مشخص کنید.  
 (پ) شیوه نمونه‌گیری را توضیح دهید.  
 (ت) نوع و مقیاس متغیر مورد بررسی را مشخص کنید.  
 (ث) نتایج را چگونه گزارش می‌کنید؟  
 (براساس تعریف مسئله و نوع متغیر، پاسخ‌ها می‌تواند متفاوت باشد.)

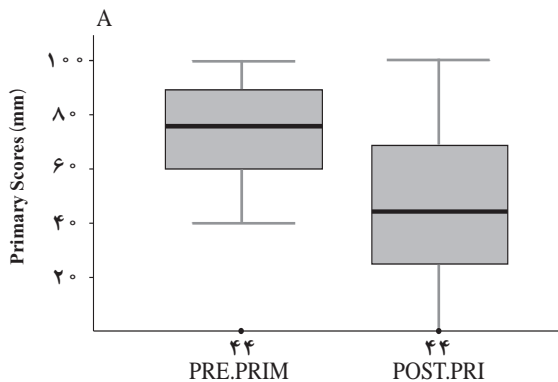
۴ در بررسی میزان پول توجیبی دانش‌آموزان یک کلاس از میان ۲۷ دانش‌آموز آن کلاس ۱۱ نفر به صورت تصادفی انتخاب شدند.  
 (الف) اندازه نمونه و اندازه جامعه را مشخص کنید.  
 (ب) متغیر مورد بررسی در این مسئله چیست؟ نوع و مقیاس آن را مشخص کنید.  
 (پ) پارامتر جامعه و آماره نمونه را مشخص کنید.  
 (ت) اگر دو نفر از دانش‌آموزان مورد بررسی در مقایسه با بقیه پول توجیبی بسیار کمی داشته باشند، معیار گرایش به مرکز و معیار پراکندگی مناسب در این مسئله چه خواهد بود؟  
 (ث) اگر متغیر مورد بررسی سن دانش‌آموزان این کلاس بود به اندازه نمونه بیشتری نیاز داشتیم یا کمتر؟ توضیح دهید.

۵ علی و آریا برای بررسی میزان رضایت مشتری‌های بازار میوه و تره‌بار ساعت ۹ صبح به یکی از این بازارها مراجعه کردند و از ۴۰ زن و ۱۰ مرد در مورد میزان رضایتشان از محصولات این بازار (به صورت بسیار راضی/راضی/ناراضی/بسیار ناراضی) پرسیدند. علی و آریا نتایج این بررسی را به صورت نمودار دایره‌ای گزارش کردند و به این نتیجه رسیدند که شهروندان از عملکرد شهرداری



این شهر در بازارهای میوه و تره‌بار تقریباً راضی هستند. چه اشکالاتی در این بررسی مشاهده می‌کنید؟ هر یک از این اشکالات مربوط به کدام گام است و چگونه می‌توانستیم آن را اصلاح کنیم؟

۶ درد اغلب نشانه‌ای از یک بیماری یا آسیب است اما گاهی درد مزمن خود یک بیماری محسوب می‌شود که می‌تواند ریشه جسمانی یا روانی داشته باشد. تا کنون درمان‌های مختلفی برای این بیماری پیشنهاد شده است اما گاهی درد مبتلایان به این بیماری با دوزهای بالایی از مسکن‌ها نیز آرام نمی‌شود. در مطالعه‌ای بر روی نوع خاصی از درد مزمن گروهی از پژوهشگران با پیشنهاد یک درمان سنتی از نمونه‌ای از بیماران خواستند میزان درد خود را بر روی یک محور ۱۰ سانتی متری علامت بزنند (مقدار صفر: کم‌ترین درد؛ مقدار ده: بیشترین درد). نتایج این بررسی در دو نمودار جعبه‌ای زیر نمایش داده شده است. نمودار سمت چپ مربوط به میزان درد بیماران قبل از درمان و نمودار سمت راست مربوط به میزان درد بیماران پس از درمان است.



الف) متغیر مورد بررسی در این مسئله چیست؟ نوع و مقیاس آن را مشخص کنید.

ب) چرا محور عمودی تا ۱۰۰ میلی‌متر اندازه‌گیری شده است؟

پ) میانه درد قبل از درمان و بعد از درمان چند است؟ این تفاوت نشان‌دهنده چیست؟

ت) پراکندگی داده‌ها در دو نمودار جعبه‌ای چگونه متفاوت است؟ این تفاوت را چگونه تفسیر می‌کنید؟

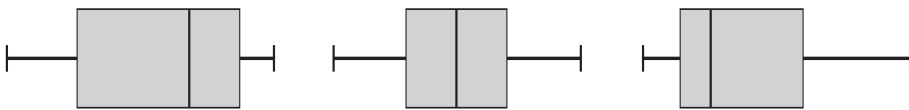
ث) یک نمودار جعبه‌ای فرضی بعد از درمان را طوری رسم کنید که این درمان مطمئن‌تر به نظر برسد.

ج) کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست است. توضیح دهید:

■ تقریباً نیمی از بیماران قبل از درمان، درد بیشتری نسبت به ۷۵ درصد بیماران بعد از درمان داشتند.

- تقریباً نیمی از بیماران بعد از درمان، درد کمتری نسبت به تمامی بیماران قبل از درمان داشتند.
- پراکندگی داده‌ها بعد از درمان کاهش یافته است.

۷ از میان سه نمودار جعبه‌ای زیر کدام یک نشان‌دهنده توزیعی با داده‌های دورافتاده کوچک، توزیعی با داده‌های دور افتاده بزرگ و کدام یک نشان‌دهنده داده‌های متقارن است؟ در هر یک از موارد کدام معیار گرایش به مرکز و پراکندگی مناسب است؟



## روشی تدریسی

در این درس می‌بایست تمرکز بر روی تقویت توانایی دانش‌آموزان در برقراری ارتباط بین مسئله و بستر آن در دنیای واقعی باشد. این مهم با تأکید کمتر بر روی محاسبات و ایجاد فضا و مجال بحث و گفت‌وگو در کلاس میسر خواهد شد.

درس سوم با بیان مسئله‌ای آغاز می‌شود که تمامی گام‌های چرخه حل مسائل آماری در آن نهفته است. در واقع دانش‌آموزان در فعالیت صفحه ۲۸ تا ۳۰، پیش از معرفی چرخه حل مسائل آماری، گام‌های مختلف چرخه حل مسائل آماری را در یک مثال مشاهده می‌کنند. در این فعالیت زیر واژگان کلیدی هر گام خطی کشیده شده تا نشان داده شود در هر گام چه مواردی بیشتر مورد توجه است.

در صفحه ۲۹ در پرسش مربوط به گام دوم (طرح و برنامه‌ریزی) تأکید می‌شود که در هر مسئله واحد اندازه‌گیری متغیر مورد بررسی باید مشخص باشد. در پرسش‌نامه پرسش الف. صفحه ۲۸، اگر «واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه)» مشخص نباشد ممکن است پاسخ‌هایی با واحد ساعت یا پاسخ‌هایی کیفی (کم، متوسط، زیاد) دریافت کنیم که تحلیل داده‌ها را مشکل می‌کند.

در گام سوم این فعالیت در صفحه ۲۹ به حفظ محرمانگی اطلاعات شرکت‌کنندگان، به‌عنوان راهی برای گردآوری اطلاعات دقیق‌تر و حفظ حریم خصوصی افراد، اشاره می‌شود و دانش‌آموزان به این نتیجه می‌رسند که اگر پرسش‌نامه‌ها بی‌نام باشد شرکت‌کنندگان اطمینان خاطر خواهند داشت که اطلاعاتشان محرمانه می‌ماند و والدین و کادر آموزشی و افرادی که داده‌ها را گردآوری می‌کنند از آن باخبر نخواهند شد. در این راستا به شرکت‌کنندگان توضیح داده می‌شود که اطلاعات گردآوری شده (مثلاً مدت زمان استفاده از تلفن هوشمند) به صورت کلی در قالب شاخص‌های آماری (مثلاً میانگین یا میانه و انحراف استاندارد یا دامنه میان چارکی) گزارش می‌شود و پاسخ تک‌تک افراد فاش نمی‌شود.

در ادامه در صفحه ۲۹ در گام چهارم (تحلیل داده‌ها)، به گزارش نتایج و یادآوری مفاهیمی که دانش‌آموزان پیش‌تر آموخته‌اند پرداخته می‌شود. در این فعالیت با توجه به مفهوم چارک‌ها، حدود ۲۵ درصد دانش‌آموزان بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند کار می‌کنند. حضور در شبکه‌های اجتماعی بیشترین فراوانی و خواندن کتاب الکترونیک کمترین فراوانی را در میان فعالیت‌ها داشتند.

در این فعالیت صفحه ۲۹، چون شرکت‌کنندگان می‌توانند بیش از یک فعالیت را علامت بزنند، مجموع درصد فراوانی‌های نسبی بیش از ۱۰۰ درصد می‌شود. در این قسمت بهتر است توضیح داده شود که نمودار دایره‌ای گزینه مناسبی برای گزارش این نتایج نیست؛ چون در نمودار دایره‌ای مجموع زوایایی که به هر قسمت تخصیص داده می‌شود باید ۳۶۰ درجه شود.

در گام آخر (بحث و نتیجه‌گیری) صفحه ۳۰، به تعمیم‌پذیری نتایج پرداخته می‌شود و دانش‌آموزان می‌آموزند که نتایج حاصل فقط در مورد دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم همان مدرسه صادق است و نمی‌توانیم نتایج آن مدرسه را به مدارس دیگر تعمیم دهیم؛ چراکه از مدارس دیگر نمونه‌گیری نکرده‌ایم و اطلاعاتی در دست نداریم. همچنین این نتایج فقط در مورد میزان و چگونگی استفاده از تلفن هوشمند صادق است و قابل تعمیم به میزان و چگونگی استفاده از ابزارهایی مانند رایانه و تبلت و... نیست.

در این گام همچنین به تفسیر نتایج می‌پردازیم و به این نتیجه می‌رسیم که حضور در شبکه‌های اجتماعی، تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی و همچنین عکاسی بیشترین فعالیت‌هایی هستند که دانش‌آموزان با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهند و نیمی از دانش‌آموزان بیش از ۷۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند و حدوداً ۲۵ درصد دانش‌آموزان کمتر از ۶۵ دقیقه و حدوداً ۲۵ درصد بیش از ۱۰۰ دقیقه با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند. (در این قسمت به علت اینکه در حالت کلی اندازه نمونه (مثلاً زوج یا فرد بودن تعداد دانش‌آموزان مورد مطالعه در این فعالیت) می‌تواند بر تعداد و درصد دقیق داده‌هایی که بین چارک‌ها قرار می‌گیرند تأثیر بگذارد از کلمه «تقریباً» و «حدوداً» استفاده شده است.)

در کاردر کلاس صفحه ۳۱ دانش‌آموزان به طور دقیق‌تر با اهداف گام‌های چرخه حل مسائل آماری آشنا می‌شوند.

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	به تفسیر نتایج به دست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	گردآوری داده‌ها	به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

از صفحه ۳۱ به بعد دانش‌آموزان به صورت عمیق‌تر با هر گام چرخه آشنا می‌شوند. در تمامی گام‌ها ایجاد فضای

گفت‌وگو برای دانش‌آموزان بسیار اهمیت دارد. در گام اول (بیان مسئله) دانش‌آموزان تمرین می‌کنند تعریف دقیق و شفافی از مسئله داشته باشند و در مورد یک جامعه آماری محدود با متغیرهای مشخص مسئله را تعریف کنند. مثلاً در بخش «بحث و گفت‌وگو» صفحه ۳۱ ممکن است دانش‌آموزان با بیان ارتباطی منطقی بگویند که نزدیکی به پارک‌ها یا ورزشگاه‌ها، جنسیت افراد و محدودیت اجتماعی برای انجام برخی ورزش‌ها، میزان آلودگی هوا در مکان مورد بررسی یا در فصل مورد بررسی می‌تواند بر میزان فعالیت بدنی تأثیر بگذارد؛ بدین ترتیب آنها می‌توانند جامعه آماری مورد بررسی را محدود کنند. مثلاً مسئله دیگری را این‌گونه بیان کنند: «بررسی میزان فعالیت بدنی روزانه پسران پیش‌دستانی دو مدرسه مشخص در روزهای تعطیل هفته در دی ماه». در بخش «بحث و گفت‌وگو» هر نوع ارتباط منطقی که از نظر ایشان قابل توجیه باشد می‌بایست شنیده و تشویق شود.

یکی دیگر از نکات مهم برای رسیدن به پاسخ مناسب مسائل به کمک آمار این است که کارها به صورت گروهی انجام شود و از نظرات متخصصان استفاده شود. در مثال «بررسی میزان فعالیت بدنی» انتظار می‌رود دانش‌آموزان به مثال‌هایی مانند افراد زیر برای حضور در گروه اجراکننده اشاره کنند:

- متخصصان تربیت بدنی (به منظور طراحی پرسش‌نامه یا ابزاری برای اندازه‌گیری فعالیت بدنی)
- والدین (برای کمک به طراحی پرسش‌نامه یا ابزار اندازه‌گیری با توجه به شناخت آنها از فعالیت فرزندان)
- معلم‌های ورزش (چنانچه هدف اندازه‌گیری فعالیت بدنی در مدرسه باشد)

■ کار درمان یا مددکار (چنانچه جامعه آماری مورد بررسی شامل افرادی با کم‌توانی جسمی باشد)

در گام «طرح و برنامه‌ریزی» دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که به چگونگی اندازه‌گیری، نمونه‌گیری و گزارش نتایج توجه کنند و با نگاهی نقادانه این موارد را بررسی کنند. آنها در این بخش می‌آموزند که هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد به اندازه بزرگ‌تری نیاز داریم. به همین دلیل در کار در کلاس صفحه ۳۳ پرسش ۱ قسمت الف. چون معدل دانش‌آموزان یک کلاس پراکنده‌تر از سن دانش‌آموزان یک کلاس است (در یک کلاس همه تقریباً هم‌سن هستند) برای بررسی معدل، اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم. به همین ترتیب در قسمت ب. چون حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی متنوع‌تر و پراکنده‌تر از حقوق معلم‌های یک مدرسه دولتی است برای بررسی حقوق کارکنان این شرکت به اندازه نمونه بزرگ‌تری احتیاج داریم.

در پرسش ۲ قسمت الف. اشکال پیشنهاد علی، قسمت ب. اشکال پیشنهاد امید و قسمت پ. نیز اشکال پیشنهاد علی است.

دو اشکال دیگر در مورد پیشنهاد علی می‌تواند موارد زیر باشد:

۱ از همه افراد مورد بررسی باید همه پرسش‌ها پرسیده شود (مثلاً از کسی که در کتابخانه است نیز باید پرسیم چقدر به مسجد و تئاتر ... می‌رود).

۲ باید به صورت تصادفی دانش‌آموزانی را انتخاب کنیم (نه فقط در مکان‌هایی که به ذهنمان می‌رسد).

در پرسش ۳ انتخاب افراد بر اساس رقم اول شماره تلفن منازل می‌تواند به انتخاب محله‌هایی بینجامد که متعلق

به طبقه اجتماعی - اقتصادی بالا یا پایینی هستند و بدین ترتیب تنوع خانوارها در نمونه کم می‌شود و تمامی قشرهای جامعه شانس حضور در نمونه نخواهند داشت.

گام سوم گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها است. در این گام همچنین به سازمان‌دهی داده‌ها می‌پردازیم. یعنی تبدیل واحدهای اندازه‌گیری یا محاسبه یک متغیر جدید بر اساس اطلاعات گردآوری شده (مثلاً محاسبه شاخص توده بدنی با استفاده از قد و وزن) در این گام انجام می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۳۴ به نکاتی در مورد پاک‌سازی داده‌ها می‌پردازد. در ادامه به پاسخ به پرسش‌های این کار در کلاس می‌پردازیم:

(الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم‌افزار این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟ ۵۱. اگر داده‌ها را با کمک نرم‌افزار به صورت نزولی (از بزرگ به کوچک) مرتب می‌کردیم ۵۱ در بالاترین سطر قرار می‌گرفت. (اگر یک بار هم داده‌ها را به صورت صعودی کنیم داده‌های بسیار کوچک به سرعت پیدا می‌شوند.)

(ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش آموز چیست؟ نمره ادبیات او چند است؟ دانش آموز شماره ۱۹ (سطر ۷). بسکتبال. ۱۹.

(پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه تایپ شده است؟ عدد ۲۲ برای دانش آموز شماره ۴۵. (ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی حذف یا اصلاح کنیم؟ ۴۴. خیر؛ داده‌های دورافتاده لزوماً داده‌های اشتباه نیستند و صحت آنها باید مورد بررسی قرار گیرد. (مثلاً در مورد بررسی حقوق شهروندان یک شهر ممکن است چند داده دورافتاده بزرگ (نجومی) مشاهده شود. اما این داده‌ها لزوماً اشتباه نیستند و نباید کنار گذاشته شوند.) (ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟ نمره دانش آموز شماره ۴۵ به صورت کیفی ثبت شده است. پیش از گردآوری داده‌ها لازم بود تأکید شود که تمامی دبیران باید آزمون ۲۰ نمره‌ای برگزار کنند.

در بخش بحث و گفت‌وگو صفحه ۳۵ پیشنهادهای دانش‌آموزان در مورد اینکه اگر دانش‌آموزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد مورد بحث قرار می‌گیرد؛ یک پیشنهاد می‌تواند این باشد که میانگین نمره‌های آزمون‌های قبلی او را به جای نمره او بگذاریم. در اینجا می‌توان درباره صفر گذاشتن برای این دانش‌آموز و تأثیر آن بر میانگین کلاس، حذف کردن تمامی اطلاعات این دانش‌آموز و یا قرار دادن میانگین کلاس به جای میانگین این دانش‌آموز بحث کرد.

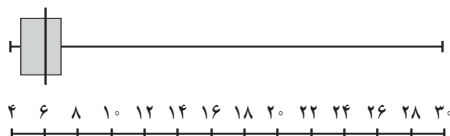
در ادامه بخش بحث و گفت‌وگوی صفحه ۳۵ لازم است تأکید شود که هرگز نمی‌توانیم اطمینان کامل داشته باشیم که داده‌ها به طور کامل پاک‌سازی و اصلاح شده‌اند. مثلاً ممکن است سن یک فرد به جای ۱۴، ۱۳ ثبت شده باشد. اما از آنجا که ۱۳ نیز در دامنه داده‌های مورد بررسی قرار دارد با صعودی و نزولی کردن

داده‌های این متغیر نمی‌توانیم به این اشتباه بی‌بیریم.

یکی از اهداف مهم طراحی این کار در کلاس این است که دانش‌آموزان یاد بگیرند در بسیاری از نرم‌افزارها «هر سطر شامل اطلاعات یک واحد آماری و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است» در گام چهارم (تحلیل داده‌ها) به گزارش نتایج با معیارها و نمودارهای مناسب پرداخته می‌شود و یادآوری می‌شود که میانگین معیار گرایش به مرکز مناسبی برای داده‌هایی که مقادیر دورافتاده دارند نیست. چرا که این معیار تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار می‌گیرد (تأکید بر اینکه میانگین مرکز ثقل داده‌ها است و به سمت داده‌ای دورافتاده می‌رود). در این موارد انحراف استاندارد (انحراف معیار) نیز معیار مناسبی نیست چرا که با استفاده از واریانس به دست می‌آید که واریانس نیز از جنس میانگین است (میانگین مجذور فاصله‌ها تا میانگین). در کار در کلاس صفحه ۳۵ به این مطلب پرداخته شده است.

													معیارهای گرایش به مرکزی		معیارهای پراکندگی		
متغیر	داده‌ها												میانگین	میانه	<i>IQR</i>	<i>SD</i>	دامنه
سن (سال)	۱۷	۱۸	۱۶	۱۷	۱۵	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۵	۱۹	۱۶/۸۳	۱۷	۱۸ – ۱۵/۵=۲/۵	۱/۳۴	۱۹ – ۱۵=۴
میزان تماشای تلویزیون	۴	۲۹	۴	۶	۷	۶/۵	۷	۸	۶	۳۰	۴	۵	۹/۷۱	۶/۲۵	۷/۵ – ۴/۵=۳	۸/۵۵	۳۰ – ۴=۲۶

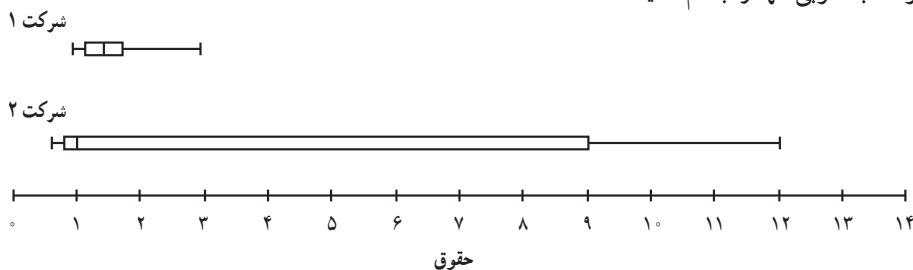
با توجه به توزیع داده‌ها برای متغیر «سن» میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) معیارهای مناسبی هستند چون داده دورافتاده مشاهده نمی‌کنیم؛ اما برای «میزان تماشای تلویزیون» میانه و دامنه میان چارکی معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مناسبی هستند؛ زیرا چند داده دورافتاده وجود دارد. داده‌های ۲۹ و ۳۰ فاصله زیادی از میانگین دارند و مجذور این فاصله‌ها باعث بزرگ شدن واریانس و به تبع آن بزرگ شدن انحراف استاندارد (انحراف معیار) شده است. در واقع میانگین (۹/۷۱) نماینده مناسبی برای داده‌های «میزان تماشای تلویزیون» نیست و به سمت داده‌های دورافتاده رفته است. در قسمت ث. کار در کلاس صفحه ۳۶ اشاره می‌شود که اگر میانگین و انحراف استاندارد معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها باشند می‌توان از نموداری که با این دو معیار رسم می‌شود داده‌ها را خلاصه و توصیف کرد. در این کار در کلاس فقط برای متغیر سن می‌توان از این نمودار استفاده کرد که مقادیر شکل الف منطبق با داده‌های متغیر سن است. در این کار در کلاس همچنین تأکید می‌شود که اگر داده دورافتاده داشته باشیم نمودار حاصل از میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) نمودار مناسبی نیست و به همین دلیل است که برای متغیر کمی مطمئن‌ترین نمودار، نمودار جعبه‌ای است.



نمودار جعبه‌ای به خوبی نشان می‌دهد که داده‌ها در کدام قسمت پراکنده‌تر و کجا فشرده‌ترند. در نمودار جعبه‌ای میزان تماشای تلویزیون ۷۵ درصد داده‌ها در بازه ۴ تا ۷/۵ به صورت فشرده قرار گرفته‌اند و ۲۵ درصد داده‌ها به صورت پراکنده‌تر در بازه ۷/۵ تا ۳۰ قرار دارند.

در کار در کلاس صفحه ۳۷ تأکید می‌شود که برای متغیرهای کمی هم گزارش معیار گرایش به مرکز و هم گزارش معیار پراکندگی لازم است. در این کار در کلاس همچنین اهمیت انتخاب درست معیار گرایش به مرکز نشان داده شده است.

در بخش الف) دو نمودار جعبه‌ای مربوط به دو شرکت بر روی یک محور رسم می‌شود تا دانش‌آموزان بتوانند به خوبی آنها را با هم مقایسه کنند.



■ حقوق تقریباً ۵۰٪ کارکنان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارکنان شرکت اول است. (درست است؛ زیرا میانه حقوق کارکنان شرکت دوم ۱ میلیون تومان و برابر با کمینه حقوق کارکنان شرکت اول است.)

■ اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. (درست است؛ زیرا یک کارمند متوسط در شرکت یک وضعیت بهتری نسبت به شرکت دو خواهد داشت؛ زیرا میانه این شرکت بیشتر از میانه شرکت دو است.)

■ در شرکت دوم، میانگین معیار گرایش به مرکز مناسبی است. (نادرست است؛ زیرا داده دورافتاده داریم و توزیع داده‌ها متقارن نیست بنابراین میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی است.)

نکته مهم اینکه همان‌طور که مریم با یک پرسش تعیین‌کننده و بجا اشاره کرده است اگر معیار گرایش به مرکز نیز گزارش می‌شد حتی با انحراف استاندارد داده‌های شرکت دوم (بیش از ۴) نیز می‌توانستیم بفهمیم که در این شرکت حقوق افراد بسیار پراکنده توزیع شده است.

در کار در کلاس دوم صفحه ۳۷ دانش‌آموزان باید به این نکته توجه کنند که برای متغیرهای کیفی هم گزارش تعداد و هم گزارش درصد اهمیت دارد و گزارش ناقص نتایج می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این کار در کلاس «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن/ قبول نشدن) یک متغیر کیفی است و مدرسه اول که قبلاً تعداد قبولی‌هایش ۱ نفر بوده و با تغییر رویکرد آموزشی ۳ نفر شده است ۲۰۰٪ افزایش داشته و

مدرسه دوم که تعداد قبولی‌هایش قبلاً ۷۰ نفر بوده و با تغییر رویکرد آموزشی ۸۴ نفر شده است ۲۰٪ افزایش داشته است. در این مثال دانش‌آموزان متوجه می‌شوند که به درصد اکتفا نکنند و حتماً در مورد این نوع متغیرها همیشه پرسش‌های تعیین‌کننده‌ای در مورد تعداد بپرسند.

در کار در کلاس صفحه ۳۹ بر یکپارچگی چرخه حل مسائل با آمار و اهمیت کارگروهی و استفاده از نظر افراد متخصص و بومی در تمامی گام‌های چرخه تأکید می‌شود.

**\* نکته مهم** در این بخش این است که دانش‌آموزان بدانند برای نقد و بررسی نتایجی که روزانه در رسانه‌ها و دنیای واقعی با آن برخورد می‌کنند نه تنها به بخش نتایج که به تمامی گام‌هایی که می‌تواند نتایج را تحت تأثیر قرار دهد می‌بایست نگاهی پرسشگر و نقادانه داشته باشند.

در پرسش ۱ این کار در کلاس نشان داده می‌شود که مشورت با افراد بومی چگونه می‌توانست به ما کمک کند بدانیم بیشتر ساکنین این منطقه چند ساله هستند و چه نیازهایی دارند.

در این کار در کلاس در پرسش ۲ قسمت الف. در گام اول مسئله به صورت دقیق و شفاف تعریف نشده است. این مسئله می‌تواند تمامی گام‌های دیگر را تحت تأثیر قرار دهد. در قسمت ب. در گام طرح و برنامه‌ریزی واحد اندازه‌گیری تعیین نشده است و داده‌ها با واحدهای مختلفی گردآوری شده‌اند. اگر واحدها قابل تبدیل به یکدیگر باشند می‌توان در گام سازمان‌دهی داده‌ها مشکل را حل کرد اما گاهی اگر در گام طرح و برنامه‌ریزی در مورد شکل اندازه‌گیری تصمیم‌گیری نشده باشد، اطلاعات بسیاری از دست می‌رود؛ مثلاً وقتی که برخی داده‌ها به صورت کیفی و برخی کمی گردآوری شده باشند. در قسمت پ. در گام داده‌ها، داده‌ها به درستی پاک‌سازی نشده‌اند؛ دور افتاده بودن داده‌ها لزوماً به معنای اشتباه بودن آنها نیست و گاهی اتفاقاً اطلاعات بسیار مهمی در آنها نهفته است. حذف داده‌های دور افتاده نتایج و تفسیر نتایج را کاملاً تحت تأثیر قرار می‌دهد. در قسمت ت. مسئله برای تمامی گروه توضیح داده نشده است و گروه به صورت یکپارچه در جریان اهداف اصلی مطالعه نیست و این اشکال سمت و سوی اجرای کار را به صورت کلی از اهداف دور می‌کند. در قسمت ث. گروه اجراکننده می‌خواهند نتایج را طبق سلیقه یا صلاحدید خود گزارش کنند. مثلاً اگر میانه معیار گرایش به مرکز بهتری است آنها بنا به مصلحت می‌خواهند میانگین گزارش کنند. این کار تفسیر نتایج و شکل نتیجه‌گیری و در نهایت تصمیمات حاصل از نتایج را کاملاً تحت تأثیر قرار می‌دهد. در قسمت ج. متخصصین آمار بدون دانش و شناخت زمینه و بستر موضوع مورد بررسی به تحلیل نتایج می‌پردازند. بدین ترتیب گام بحث و نتیجه‌گیری که نیازمند این شناخت است و به ارائه ایده‌ها و پیشنهادها می‌انجامد به خوبی انجام نمی‌شود.

### حل تمرین درس سوم

**۱** به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست در مقطع دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه،



زبان مادری و...) و انتخاب متغیر تصادفی مناسب این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

پاسخ: بررسی معدل نیم سال اول دانش آموزان دختر کرد زبان پایه اول دبستان مدرسه ای در سنجند (مقایسه آن با مدرسه ای مشابه در شهری مشابه از نظر اجتماعی - اقتصادی با گویش فارسی یا مقایسه آن با متوسط معدل دانش آموزان دختر پایه اول کل کشور) (هر پاسخ دیگری که با متغیری قابل اندازه گیری و جامعه آماری مشخص به حل این مسئله برسد قابل قبول است).

۲ با توجه به تأثیر شیوه های مختلف حمل و نقل بر محیط زیست می خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش آموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام یک از شیوه های زیر به مدرسه آمده اند؟

■ پیاده یا با دوچرخه

■ با وسایل حمل و نقل عمومی

■ با سرویس مدرسه یا خودرو شخصی

الف) در این مطالعه جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

پاسخ: جامعه آماری: تمامی دانش آموزان این کلاس؛ نمونه آماری: ۹ دانش آموزی که به تصادف انتخاب شده اند؛ اندازه جامعه: ۲۸؛ اندازه نمونه: ۹.

ب) با چه روشی می توان داده های این مطالعه را گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در جمع آوری این داده ها رخ دهد؟

پاسخ: می توانیم با طراحی یک پرسش نامه داده ها را گردآوری کنیم. ممکن است برخی دانش آموزان پیاده به مدرسه بیایند ولی با اتوبوس برگردند. قبل از گردآوری داده ها باید به این مسائل فکر کنیم.

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر و مقیاس اندازه گیری را مشخص کنید. پاسخ: شیوه حمل و نقل؛ با توجه به اینکه شیوه های حمل و نقل در این مسئله بر اساس تأثیر آنها بر محیط زیست طبقه بندی شده اند (از سازگارترین با محیط زیست تا زیان بارترین برای محیط زیست) این متغیر کیفی ترتیبی است.

ت) چه نمودارها و چه آماره هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب اند؟

پاسخ: می توانیم از نمودار میله ای یا دایره ای و از تعداد و درصد برای گزارش نتایج استفاده کنیم.

ج) آیا می توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش آموزان این کلاس به کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل های مختلف یا زمان برگزاری آزمون های پایان نیم سال)؟ توضیح دهید.

پاسخ: خیر؛ زیرا ممکن است شیوه رفت و آمد دانش آموزان در فصل های مختلف یا زمان برگزاری آزمون های پایان نیم سال این طور نباشد و تغییر کند.

ث) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به تصادف انتخاب می کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می شد؟ توضیح دهید.

پاسخ: خیر؛ ممکن است نتایج متفاوتی حاصل شود (لازم است در اینجا به این نکته که در پایه دهم آمده بود اشاره شود که پارامتر جامعه (تعداد و درصد در کل کلاس) مقدار ثابتی است ولی آماره نمونه (تعداد و درصد در افرادی که در نمونه قرار گرفته‌اند) متأثر از نمونه‌گیری است و تغییر می‌کند).

۳ در هر یک از موارد زیر علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هر یک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در بین کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی  
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

پاسخ: جامعه آماری تمامی کارمندان در تمامی شیفت‌ها هستند. اما در نمونه فقط مدیران ارشد شیفت روز شانس حضور دارند. این نمونه‌گیری نتایج را تحت تأثیر قرار می‌دهد و ممکن است میزان رضایت این افراد نسبت به کارمندان ساده شیفت شب بالاتر باشد و نتایج گمراه‌کننده شود. باید از لیست تمامی کارمندان همه شیفت‌ها به صورت تصادفی افرادی را انتخاب کنیم.

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر در مورد میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون

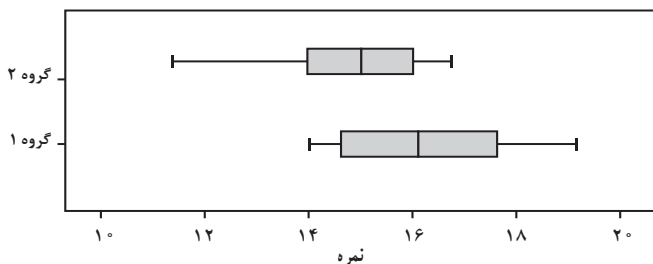
نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق آن شهر و مراجعه بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح  
پاسخ: در این شیوه نمونه‌گیری مادران شاغل شانس حضور ندارند و این مشکل می‌تواند نتایج را تحت تأثیر قرار دهد. گردآوری داده‌ها را می‌توان به عصرها یا ساعات مختلفی از شبانه‌روز موکول کرد. پیشنهادی دانش‌آموزان می‌بایست مورد بحث و بررسی قرار گیرد و توسط دیگر دانش‌آموزان نقد شود. هر پیشنهادی که به تمامی افراد جامعه شانس حضور برابر دهد قابل قبول است.)  
پ) مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه دو بوشهر درباره اینکه به صورت متوسط چند ساعت در روز را به انجام تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.  
پاسخ: فقط دختران مورد بررسی قرار گرفته‌اند. داوطلبان مشارکت ممکن است دانش‌آموزانی باشند که تکالیف خود را مرتب انجام می‌دهند و این نوع نمونه‌گیری می‌تواند ما را از نتایج واقعی منحرف کند. می‌توان لیستی از دانش‌آموزان (دختران و پسران) مدارس این منطقه تهیه کرد و به صورت تصادفی افرادی را انتخاب کرد.

۴ «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم‌زمان هستیم در واقع مغز ما دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تشنه خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن خود می‌شنویم مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان

می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»

سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک) با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را نمی‌کنند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



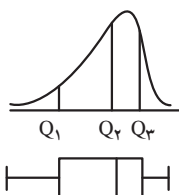
الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
پاسخ: نیمی از دانش‌آموزان گروه یک عملکرد بهتری نسبت به ۷۵ درصد دانش‌آموزان گروه دو داشته‌اند.

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.  
پاسخ: دامنه تغییرات گروه دو بیشتر از گروه یک و دامنه میان چارکی گروه یک بیشتر از گروه دو است.

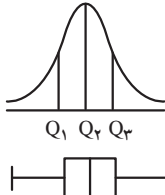
پ) از مقایسه کینه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
پاسخ: تمامی دانش‌آموزان گروه یک عملکرد بهتری نسبت به ۲۵ درصد دانش‌آموزان گروه دو دارند.

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟  
پاسخ: به نظر می‌رسد گروه دو داده یا داده‌های دورافتاده کوچکی دارد (کشیدگی یک چهارم اول نمودار). به همین دلیل گزارش میانگین و انحراف استاندارد (معیار) برای این گروه مناسب نیست. در این قسمت برای درک بهتر دانش‌آموزان می‌توان به شکل‌های زیر و چگونگی تأثیر توزیع داده‌ها بر نمودار جعبه‌ای اشاره کرد.

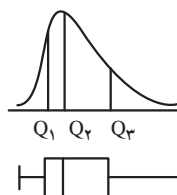
Left-Skewed



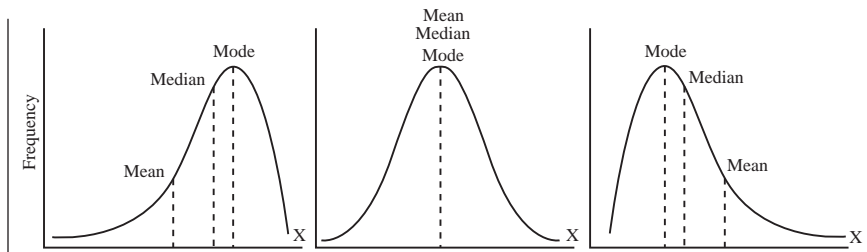
Symmetric



Right-Skewed



ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیکتر هستند؟  
پاسخ: به نظر می‌رسد در گروه یک توزیع داده‌ها متقارن‌تر است و در نتیجه میانگین و میانه نزدیک‌تر هستند. در این قسمت برای درک بهتر دانش‌آموزان می‌توان به شکل‌های زیر و چگونگی تأثیر توزیع داده‌ها بر معیارهای گرایش به مرکز اشاره کرد.



ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟  
پاسخ: دانش‌آموزان پایه دوازدهم مدرسه سعید و سهراب  
 ۵) در یک نظرسنجی از ۱۵ دانش‌آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های جمع‌آوری شده به این شرح است:

۱۲ ۱۴ ۲۰ ۲۲ ۱۸ ۲۰ ۰ ۴ ۶ ۱۳ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۶

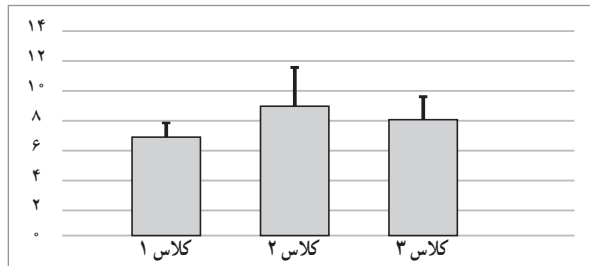
الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه، چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

پاسخ: پس از مرتب کردن داده‌ها متوجه می‌شویم که مثلاً اگر به جای بزرگ‌ترین داده (۲۲)، عددی مانند ۳۲ بگذاریم میانگین و انحراف استاندارد بزرگ‌تر می‌شوند ولی میانه و چارک‌ها تغییر نمی‌کنند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

پاسخ: میانگین این داده‌ها  $12/6$  است. با توجه به مفهوم مرکز ثقل برای میانگین، اگر دو عدد با فاصله‌های برابر (یکی کمتر و دیگری بیشتر از میانگین) به داده‌ها اضافه شود میانگین تغییر نخواهد کرد. اگر بخواهیم میانه نیز تغییر نکند نباید عددی بین میانگین ( $12/6$ ) و میانه (۱۲) قرار گیرد. مثلاً دو عدد  $11/6$  و  $13/6$  مناسب‌اند.

۶) با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم میانگین ساعت خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته بر حسب ساعت ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن، نتایج را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل نشان‌دهنده میانگین و میله خط نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که از دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌پرسیم آیا آنها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

پاسخ: فراموش کردن ساعت‌های خواب می‌تواند بر نتایج تأثیر بگذارد. بهتر است پرسش‌نامه‌ای تهیه کنیم و از آنها بخواهیم در طول هفته هر شب میزان خواب خود را یادداشت کنند.

ب) نوع متغیر و مقیاس اندازه‌گیری مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

پاسخ: کمی، نسبتی

ت) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۵	۱/۵

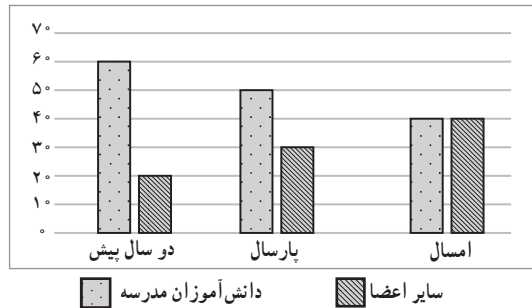
ث) چه عواملی می‌تواند نتایج این مطالعه را تحت تأثیر قرار دهد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید پاسخ دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

پاسخ: ممکن است یکی از کلاس‌ها در زمان انجام این مطالعه آزمونی داشته که میزان خواب دانش‌آموزان آن کلاس را تحت تأثیر قرار دهد. بهتر است از این نظر هماهنگی بین کلاس‌ها برقرار باشد یا اینکه مطالعه در زمان طولانی‌تری (چند هفته) انجام شود.

ج) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

پاسخ: متخصصین اختلالات خواب، روان‌شناسان، والدین و مشاوران آموزشی می‌توانند در اندازه‌گیری و طراحی یک پرسش‌نامه مناسب و اجرا به ما کمک کنند.

✓ مدرسه‌ای به منظور ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

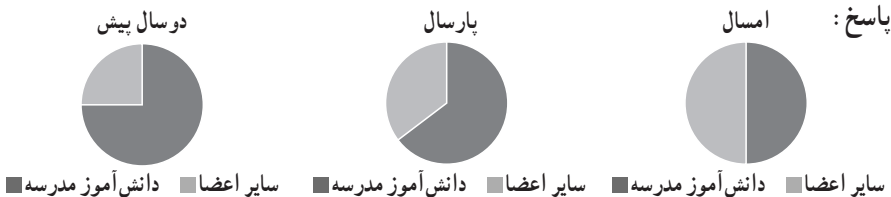
پاسخ: ۳۰ نفر

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پاسخ: ۳۰ نفر

ت) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه

رسم کنید.



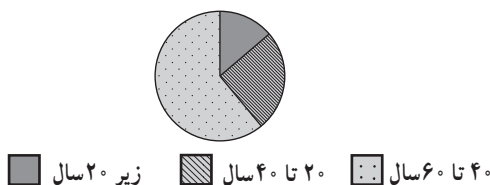
ث) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

پاسخ: هر پاسخی از دانش‌آموزان که بتواند نتایج را توجیه کند پذیرفته است. مثلاً شلوغی فضای کتابخانه با افرادی ناآشنا، تمایل کتابخانه به ثبت‌نام افراد خارج از مدرسه به دلیل حق عضویت بیشتر یا کمک‌های آنها به کتابخانه و یا اینکه به مرور زمان با افزایش اعضای خارج مدرسه کتاب‌ها از سلاقی دانش‌آموزان دور شده است.

۸ نتیجه مطالعه‌ای فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش را در گروه‌های مختلف سنی در نمودار

دایره‌ای زیر نمایش داده است. (در این نمودار ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی زیر ۲۰ سال، ۹۰ درجه

مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و مابقی مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است)



الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

پاسخ: ۶۰ درصد

ب) مسئول فروش بلیت این سالن پس از مشاهده نتایج، آن را غیر واقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌تواند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

✓ بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.

✓ گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.

✗ هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.

۹ جدول زیر نشان دهندهٔ تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

تعداد خودروهای تصادف کرده	۱۰	۲۰	۴۰	۷۰	۱۵۰	۲۴۰	۳۵۰	۴۵۰	۲۱۰	۱۳۰	۴۰
(کیلومتر در ساعت) سرعت											

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده،

کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پاسخ: این نتیجه‌گیری صحیح نیست. زیرا نمی‌دانیم که در هر سرعت چند خودرو با آن سرعت حرکت

کرده است. مثلاً اگر ۱۰ خودرو با سرعت بین ۱۱۰ تا ۱۲۰ حرکت کرده باشد، این نتایج نشان می‌دهد که

صد درصد آنها تصادف داشته‌اند. برای تحلیل صحیح داده‌ها نباید فراوانی گزارش شود بلکه باید نسبت

تعداد تصادف‌های هر دسته به تعداد خودروهایی که با سرعت آن دسته حرکت می‌کرده‌اند گزارش شود. (این

اطلاعات در این مسئله موجود نیست.)

## پروژه

انجام پروژه توسط دانش‌آموزان به صورت گروه‌های چند نفره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و

دانش‌آموزان مفاهیم و نکاتی را که در این درس آموخته‌اند در قالب انجام پروژه به خوبی درک خواهند

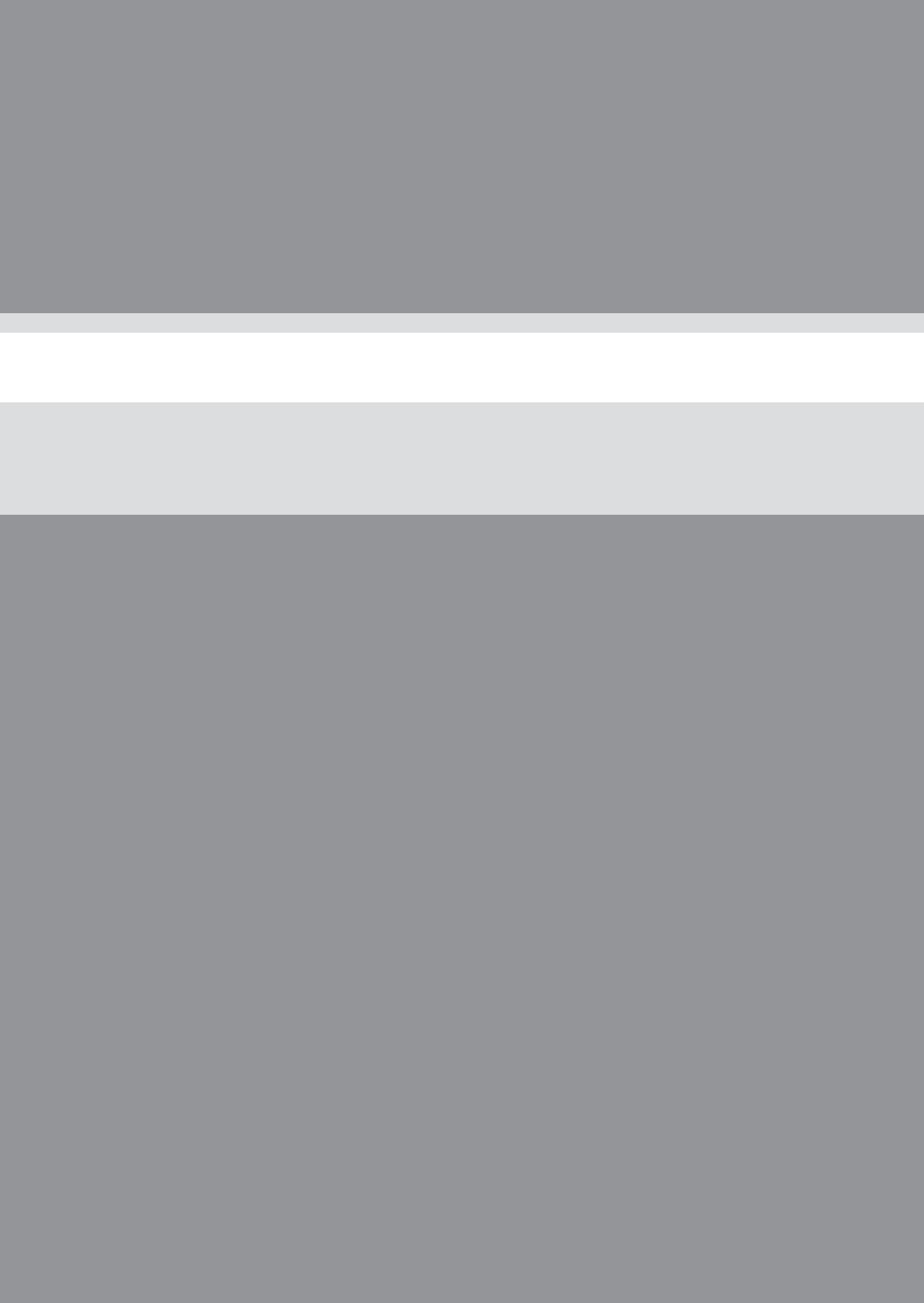
کرد. انجام پروژه گروهی با موضوعی که دانش‌آموزان به آن علاقه‌مند هستند «توانایی نقد و بررسی نتایج

مطالعهٔ دیگر گروه‌ها» را در آنها تقویت می‌کند. دانش‌آموزان با کارگروهی می‌آموزند که لزوماً پاسخ‌یکتایی

برای حل هر مسئله وجود ندارد و می‌توان به شیوه‌های مختلف به راهی برای حل مسئله فکر کرد. انجام

پروژه با هدایت معلم به دانش‌آموزان کمک می‌کند در تمامی گام‌های چرخهٔ حل مسئله به اهداف نخستین کار

ببندیشند و به محدودیت‌های انجام پروژه واقف باشند.





## فصل ۲

### الگوهای خطی



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیر خطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

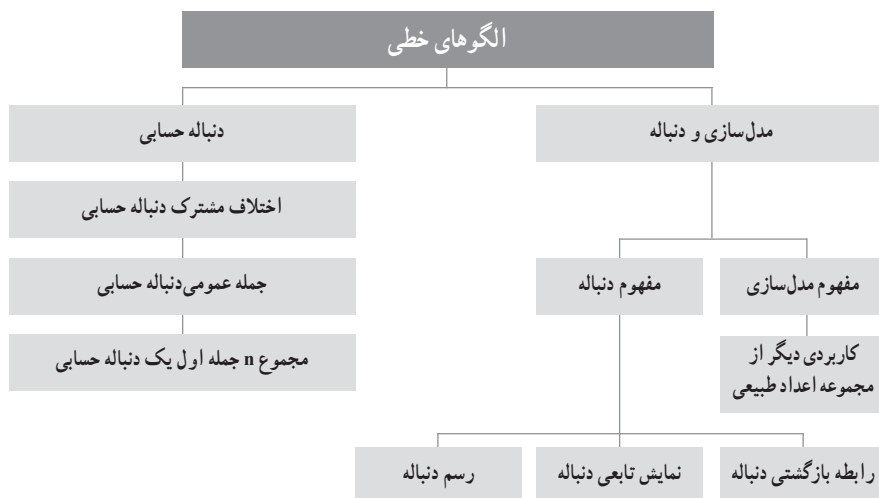
## نگاه کلی به فصل

فصل ۲ کتاب ریاضی پایه دوازدهم به مبحث الگوهای خطی اختصاص یافته است. در این فصل با استفاده از ارتباطات مفهومی میان مفاهیم ریاضی و غیرریاضی، موقعیت‌ها و وضعیت‌های واقعی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و در موارد مناسب مدل‌سازی شده‌اند. این فصل شامل دو درس است. در درس اول، ابتدا مفهوم مدل‌سازی برای بررسی مسائلی از دنیای واقعی یادآوری شده است و همچنین کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی و رفتار تابع در این مجموعه بررسی می‌شود. از نمایش‌های ریاضی (نمودارها، نقشه‌ها، جدول‌ها، نمادها و علائم و...) به عنوان ابزاری برای فهم، درک، تجزیه و تحلیل مفاهیم ریاضی استفاده شده است. سپس با استفاده از مفاهیم الگو و تابع، مفهوم دنباله تشریح شده و نحوه به دست آوردن جمله عمومی دنباله به صورت رابطه بازگشتی و نمایش تابعی آن بیان می‌شود و نشان می‌دهد که مفاهیم ریاضی با یکدیگر در ارتباط هستند و شناخت این ارتباطات، درک و یادگیری مفاهیم ریاضی را عمیق‌تر می‌سازد. در درس دوم به مفهوم دنباله حسابی و مسائل مربوط به آن پرداخته شده است. ویژگی دنباله حسابی و شباهت آن با تابع خطی، پیدا کردن جمله عمومی آن و مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی همراه با مثال‌ها و مسائل متنوعی مطرح می‌شود. در این فصل، قبل از ورود به مبحث مورد نظر، مسائلی واقعی از محیط پیرامون و زندگی روزمره در قالب فعالیت‌های متنوع مطرح شده‌اند و هدف از این قسمت، ایجاد انگیزه و فعال‌سازی دانش‌آموزان و درگیر کردن عملی آنها برای ساختن مفاهیم جدید است که پس از پاسخ به فعالیت‌ها و نتیجه‌گیری از آن، به مفهوم موردنظر پی ببرند.

### اهداف کلی فصل الگوهای خطی عبارت است از:

- ۱ نگاهی کاربردی به مفاهیم ریاضی در توصیف پدیده‌های متفاوت محیط پیرامون و معنادار دیدن مفاهیم ریاضی.
- ۲ به کارگیری نمایش‌های ریاضی برای مدل‌سازی و تفسیر و درک پدیده‌های مختلف.
- ۳ ارتباطات مفهومی میان مفاهیم ریاضی و غیرریاضی و تجزیه و تحلیل موقعیت‌ها و وضعیت‌های واقعی.
- ۴ آشنایی با الگوهای خطی در برخی پدیده‌هایی از دنیای واقعی.
- ۵ آشنایی با مفهوم دنباله و رسم نمودار آن.
- ۶ آشنایی با مفهوم دنباله حسابی و به کارگیری آن در توصیف برخی پدیده‌های مختلف.
- ۷ توانایی در «حل مسئله» و طرح مسائل «باز پاسخ» و به کارگیری راهبردهای حل مسئله.
- ۸ ارتقای نگرش مثبت به ریاضی به عنوان ابزاری قدرتمند و اساسی برای درک و حل مسائلی از دنیای واقعی.

## نقشه مفهومی فصل دوم



## دانستنی‌هایی برای معلم

یکی از مفاهیمی که به همراه شناسایی عددهای طبیعی شناخته می‌شود، مفهوم دنباله‌ای این اعداد است؛ هر عدد طبیعی قبل و بعد از عدد طبیعی دیگر واقع است. این مفهوم زمینه را فراهم می‌سازد تا دنباله‌های دیگری از اعداد شناسایی شوند. از این رو تاریخ شناسایی دنباله‌های اعداد به قدمت تاریخ عددهای طبیعی است. در گذشته که نمادها و علامت‌ها در ریاضیات به کار نمی‌رفت و فراگیری ریاضیات و انجام دادن عملیات آن به سادگی امروز نبود، بعضی دنباله‌های اعداد را که می‌شناختند و با نام ویژه مشخص می‌کردند و بررسی ویژگی‌های هر یک را جداگانه انجام می‌دادند. مانند :

$$\begin{array}{l}
 \text{اعداد مثلثی:} \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 3 & , & 6 & , & \dots \\ \circ & & \circ \circ & & \circ \circ \circ & & \dots \end{array} \right. \\
 \text{اعداد مربعی:} \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 4 & , & 9 & , & \dots \\ \circ & & \circ \circ & & \circ \circ \circ & & \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

اعداد مخمسی، اعداد مسدسی و ....  
در سده‌های اخیر با استفاده از نمادها و علامت‌ها، امکان آن فراهم شده است که مفهوم دنباله اعداد از یک سو تعمیم یابد و از سوی دیگر به صورت اصولی و منظم بررسی گردد، تا آنجا که امروزه شاخه‌ای از آنالیز ریاضی به بحث درباره ویژگی‌های دنباله‌های اعداد اختصاص دارد.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

- (الف) یک دنباله تابعی است که دامنه آن ..... و برد آن ..... است.  
(ب) در رابطه بازگشتی، ..... میان جملات دنباله معرفی می‌شود و در ضابطه تابعی دنباله، ..... مشخص است.  
(پ) دامنه تابع مدل ریاضی مسئله «میزان مصرف برق ماهیانه یک خانه از اول سال»، ..... است.  
(ت) جمله چهارم دنباله  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ، برابر ..... است.  
(ث) جمله ..... دنباله  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، برابر  $\frac{1}{81}$  می‌باشد.  
(ج) یک دنباله حسابی دنباله‌ای است که ..... میان جملات متوالی دنباله، ثابت است.  
(چ) اگر  $a_m$  و  $a_n$  جملات  $m$ ام و  $n$ ام یک دنباله حسابی باشند، حاصل  $a_m - a_n$  برابر با  $d \times (\dots)$  است.  
(ح) اگر مقدار اختلاف مشترک در یک دنباله حسابی ..... باشد، دنباله افزایشی و اگر ..... باشد، دنباله کاهشی می‌باشد.

- (خ) شیب خط در یک تابع خطی همان ..... جملات دنباله حسابی می‌باشد.  
(د) اگر در یک دنباله حسابی  $a_5 = -8$  و  $d = -3$  باشد، جمله اول آن برابر ..... است.  
(ذ) مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی ... ۱۵ و ۱۱ و ۷ و ۳، برابر ..... است.

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) رابطه بازگشتی دنباله اعداد ...،  $-5$ ،  $-1$ ،  $3$ ،  $7$ ، به صورت  $a_n = a_{n-1} + 4$  است.  
(ب) جمله عمومی دنباله ... و  $999/^\circ$ ،  $99/^\circ$ ،  $9/^\circ$  به صورت  $a_n = \frac{10^n - 1}{10^n}$  می‌باشد.  
(پ) دنباله حسابی همان الگوی خطی است.  
(ت) مجموع دنباله حسابی  $199$ ،  $9$ ،  $4$ ،  $-1$  برابر  $2059$  می‌باشد.

ث) دنباله  $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots$  یک دنباله حسابی نیست.

ج) اگر  $a, b$  و  $c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه:  $2b = a + c$

چ) جملات یک دنباله ممکن است فاقد یک الگو باشند.

ح) در یک دنباله حسابی  $a_5 - a_{12} = 42$  است، اختلاف مشترک این دنباله برابر ۷ می باشد.

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) جمله ششم دنباله  $a_n = \frac{2n}{n+2}$  کدام است؟

۱  $\frac{2}{3}$     ۲  $\frac{10}{7}$     ۳  $\frac{3}{2}$     ۴  $\frac{4}{3}$

ب) تفاضل دو عدد  $20^\circ$  است، بین آنها چهار عدد درج می کنیم به طوری که شش عدد حاصل، دنباله

حسابی تشکیل دهند. اختلاف مشترک این دنباله چقدر است؟

۱ ۳    ۲ ۴    ۳ ۵    ۴ ۶

ب) در یک دنباله حسابی جمله چهاردهم برابر  $\frac{2}{3}$  و جمله نهم برابر  $\frac{1}{4}$  است. جمله اول این دنباله کدام

است؟

۱  $-\frac{5}{12}$     ۲  $\frac{5}{12}$     ۳  $-\frac{1}{12}$     ۴  $\frac{1}{12}$

ت) نخستین جمله یک دنباله حسابی ۲۵ و اختلاف مشترک آنها ۱۸ می باشد. کدام جمله دنباله برابر

۶۰۱ است؟

۱ ۱۱    ۲ ۲۲    ۳ ۳۳    ۴ ۴۴

ث) کدام یک از گزینه های زیر رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی را نشان می دهد؟

۱  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$     ۲  $a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n-1}$     ۳  $a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$     ۴  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$   
 $a_1 = a_2 = 1$      $a_1 = a_2 = 1$      $a_1 = a_2 = 1$      $a_1 = a_2 = 1$

ج) جمله عمومی دنباله  $\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{10}{11}, \frac{17}{14}, \dots$  کدام است؟

۱  $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$     ۲  $a_n = \frac{n^2+1}{2n+3}$     ۳  $a_n = \frac{n^2+1}{3n+2}$     ۴  $a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$

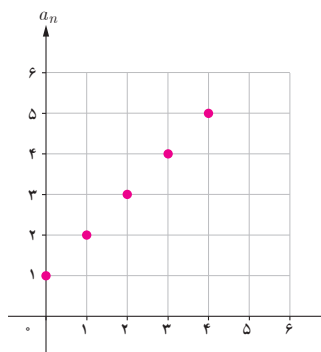
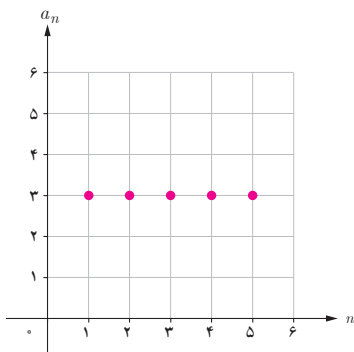
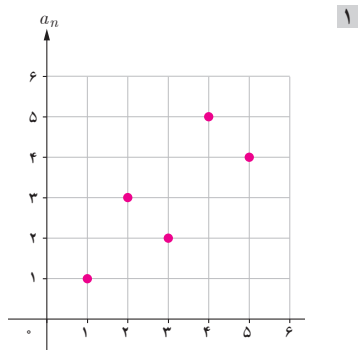
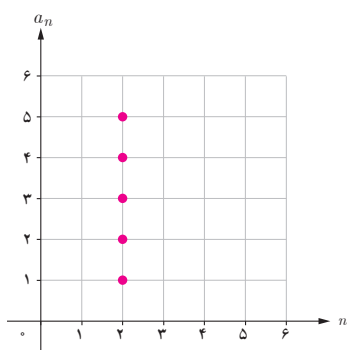
چ) در یک دنباله حسابی  $a_6 = 68$  و  $a_{11} = 4$ ،  $a_1 = 4$ ، جمله چندم  $408$  می شود؟

۱ ۱۲۱    ۲ ۱۰۲    ۳ ۱۲۰    ۴ ۱۰۱

ح) در یک دنباله حسابی  $a_7 = 20$ ، حاصل  $a_7 + a_6 + a_8 + a_{11}$  کدام است؟

۱ ۶۰    ۲ ۷۰    ۳ ۸۰    ۴ ۹۰

خ) کدام نمودار زیر می‌تواند بیانگر یک دنباله حسابی باشد؟



۴ جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
$\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{5}, \dots$			
$۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, \dots$			
$۱, ۵, ۱, ۵, ۱, ۵, \dots$			
$-۱, \frac{۲}{۵}, -۳, \frac{۴}{۵}, -۵, \frac{۶}{۵}, \dots$			

۵ نمودار دنباله‌های زیر را رسم کنید.

پ)  $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

ب)  $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

الف)  $a_n = \frac{n+1}{n}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n} \quad (ت) \quad a_1 = -1$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{زوج } n \\ 2 & \text{فرد } n \end{cases} \quad (ث)$$

۶ در دنباله  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots$  جمله عمومی و جمله صدم را بیابید.

۷ مقدار  $m$  را طوری محاسبه کنید که جملات  $1-3m$  و  $2m$  و  $1+2m$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند.

۸ در یک دنباله حسابی جمله پنجم برابر با ۱۴ و جمله هفتم برابر با ۲۰ است. جمله عمومی این دنباله را مشخص کنید و جمله دهم آن را به دست آورید.

۹ بین دو عدد ۲- و ۵۴، سه عدد چنان بیابید که پنج عدد حاصل یک دنباله حسابی تشکیل دهند؟

۱۰ اعداد  $1-5p$ ،  $4+3p$  و  $3+2p$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی هستند. اختلاف مشترک این دنباله را بیابید.

۱۱ در یک دنباله حسابی جمله سوم برابر ۱ و جمله هفتم برابر با ۷ می باشد. مجموع دوازده جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۲ در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است؟

۱۳ در یک دنباله حسابی، جمله  $n$ ام به صورت  $a_n = \frac{3}{4}n - 5$  است. مجموع پانزده جمله اول این دنباله را حساب کنید.

۱۴ اعداد  $\frac{5}{4}$  و  $y$  و  $x$  و ۱ به ترتیب چهار جمله اول از یک دنباله حسابی هستند. مجموع پانزده جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۵ مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$  است. مجموع جملاتی از این دنباله که از جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، را بیابید.

۱۶ جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = \frac{1+3n}{n+1}$  است.

(الف) چهار جمله اول این دنباله را بنویسید.

(ب) نمودار این دنباله را رسم کنید.

(پ) جمله چندم این دنباله برابر  $\frac{1}{3}$  است؟

۱۷ اگر  $a_n = n^2 + (-1)^n$  و  $b_n = -1$  و  $C_n = \frac{n-1}{4}$  باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $a_1 + b_7 + c_9$  (ب)  $a_2 - b_2 + c_5$

۱۸ با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است؟

(الف)  $a_{n+1} = a_n + (n+1)$  (ب)  $a_{n+1} = 2a_n + 3$   
 $a_1 = 1$   $a_1 = -2$

(پ)  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 2$  (ت)  $a_{n+1} = a_n + 3$   
 $a_1 = 1$   $a_1 = -5$

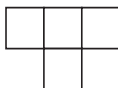
۱۹ جسمی از ارتفاع  $h$  متری سقوط می‌کند. در صورتی که جسم در ثانیه اول ۵ متر، در ثانیه دوم ۱۵ متر

و در ثانیه سوم ۲۵ متر طی کند، با فرض اینکه افزایش طول مسیر طی شده در هر ثانیه یکنواخت باشد

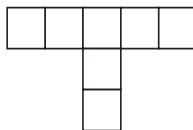
و جسم پس از مدت ۲۱ ثانیه به زمین برسد، اندازه  $h$  را به دست آورید.

۲۰ تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۷ چقدر است؟

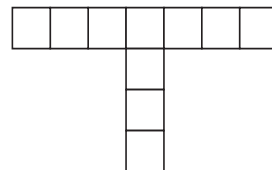
۲۱ ضلع هر مربع در الگوی زیر ۱ واحد است. اگر این الگو ادامه یابد :



۱



۲



۳

(الف) رابطه‌ای بنویسید که محیط تابعی از شماره شکل باشد. رابطه بازگشتی میان الگوی بالا را مشخص کنید.



(ب) محیط نهمین شکل را به دست آورید.

(پ) محیط شکل کدام مرحله ۷۶ واحد است؟

۲۲ مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی  $40^\circ$  و مجموع سه جمله بعدی آن  $51$  می باشد. جمله اول آن را بیابید؟

۲۳ شیر آبی در هر دقیقه ۲ لیتر آب وارد یک حوض می کند. اگر این حوض از ابتدا ۱۸ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض را پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج دقیقه به صورت یک دنباله بنویسید. آیا این دنباله حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند دقیقه آب حوض  $60^\circ$  لیتر می شود؟

۲۴ یک قطار باری از ایستگاهی در  $60^\circ$  کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و با سرعتی ثابت به سمت طبرس حرکت می کند. در هر ساعت  $90^\circ$  کیلومتر به فاصله این قطار تا بندرعباس اضافه می شود. فاصله این قطار تا بندرعباس را در پایان ساعت اول، دوم، سوم، چهارم و پنجم در یک دنباله بنویسید. آیا دنباله حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند ساعت، فاصله این قطار تا بندرعباس  $960^\circ$  کیلومتر می شود؟

۲۵ مجموع سه جمله از یک دنباله حسابی برابر با ۲۷ و حاصل ضرب همین سه جمله برابر با ۶۴۸ است. اختلاف مشترک این دنباله چقدر است؟

۲۶ تعداد اعداد سه رقمی که رقم سمت راست آنها ۴ بوده ولی بر ۴ بخش پذیر نیستند را به دست آورید.

۲۷ بین اعداد ۱ و ۸۱، چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله های دنباله حسابی حاصل، برابر ۲۴۶ شود؟

۲۸ اگر در یک دنباله حسابی  $a_3 = 33$  و  $a_5 = 19$  باشد، چند جمله این دنباله مثبت است؟

۲۹ یک شمع  $20$  سانتی متر ارتفاع دارد و در هر دقیقه  $5/^\circ$  سانتی متر می سوزد.

(الف) بعد از چند دقیقه ارتفاع شمع به  $7/5^\circ$  سانتی متر می رسد؟

(ب) پس از چند دقیقه شمع خاموش می شود؟

(پ) آیا این دنباله حسابی است؟ چرا؟

## مدل سازی و دنباله

### اهداف درس اول

- ۱ یادآوری مدل سازی مسائلی از دنیای واقعی و تفسیر نمودار تابع آنها.
- ۲ به کارگیری نمایش های مختلف ریاضی برای درک بهتر و تجزیه و تحلیل مفاهیم ریاضی.
- ۳ تشخیص دامنه توابع مدل شده ریاضی با استفاده از مفاهیم اساسی اعداد طبیعی و اعداد حقیقی.
- ۴ آشنایی با کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی و درک رفتار تابع در این مجموعه.
- ۵ آشنایی با مفهوم الگوهای خطی و ارتباط آنها با دنیای واقعی.
- ۶ آشنایی با مفهوم دنباله و رسم نمودار آن.
- ۷ تشخیص الگوی موجود در برخی دنباله ها و پیدا کردن رابطه بازگشتی و نمایش تابعی آنها.
- ۸ توانایی در حل مسئله ریاضی و حل مسائلی از دنیای واقعی.

### روش تدریس

ورود به مطلب درس با فعالیتی آغاز شده است و سؤالات آن مثال های عینی هستند که یادآوری مفهوم مدل سازی در مسائلی از دنیای واقعی می باشد و مروری بر مفهوم تابع چندضابطه ای، تعیین دامنه و برد و رسم نمودار آن است. همچنین در این فعالیت، تفاوت نمودار تابع سؤال قسمت ۱ و ۲ را نشان می دهد، که تأکید بر تأثیر دامنه تابع بر روی نمودار آن را دارد. در فعالیت ها از نمایش های متفاوت ریاضی (نمودارها، جدول ها، نمادها و علائم و...) برای مدل سازی و تفسیر و درک مفاهیم ریاضی در پدیده های مختلف استفاده شده است. کاردرکلاس صفحه ۴۸، در قسمت ۱، سؤالات بازپاسخ مطرح شده و هدف از آن، تشخیص و تعیین دامنه توابع مدل شده ریاضی برخی مسائل از دنیای واقعی است و در قسمت ۲، طرح سؤالات بازپاسخ خواسته شده و هدف از آن، پرورش خلاقیت و توانایی در طرح مسائلی از دنیای واقعی است که دامنه آنها مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه اعداد حقیقی می باشد. بهتر است برای ایجاد انگیزه و علاقه مند نمودن دانش آموزان برای یادگیری، با روش پرسش و پاسخ در کلاس به گفت و گو پرداخت، تا آنان ایده های خود را بیان نمایند.

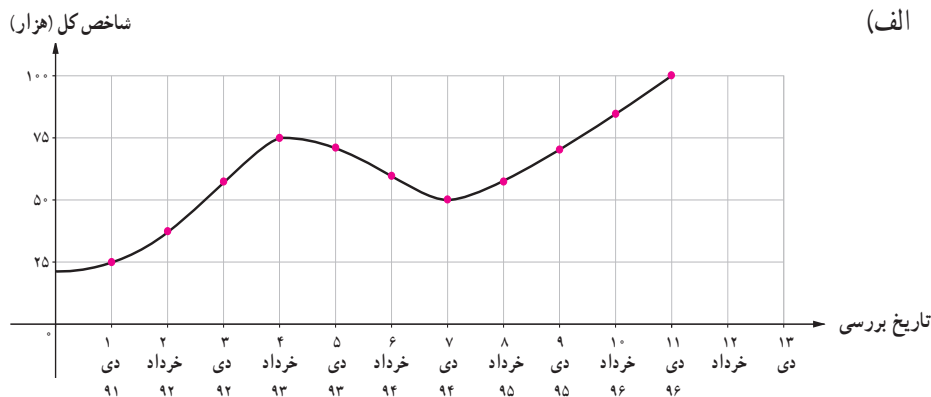
همان طور که از نام اعداد طبیعی پیدا است، اولین دسته از اعداد هستند که به طور طبیعی در مسیر سیر تفکر ریاضیات ظاهر شده و به وجود آمده اند و در تعیین دامنه تعریف برخی توابع از آن استفاده می شود.

در صفحه ۴۹، کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی با طرح مسئله‌ای کاربردی بیان شده است و هدف بررسی رفتار تابع با توجه به تغییر دامنه تعریف آن می‌باشد. دانش آموزان از دوره اول متوسطه با مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد حقیقی آشنایی دارند. حال در رویارویی با این گونه مسئله‌ها و تغییری که در رفتار یک تابع با توجه به انتخاب دامنه آن از مجموعه اعداد طبیعی ایجاد می‌شود، با مفاهیم اساسی اعداد طبیعی آشنا می‌شوند. این مبحث درس در واقع پیش‌نیازی برای بیان مفهوم دنباله است.

فعالیت صفحه ۵۰، مسئله‌ای مربوط به کاربرد سری زمانی در علم اقتصاد است. همان‌طور که در کتاب ریاضی یازدهم خوانده شد، منظور از یک سری زمانی، مجموعه‌ای از داده‌های آماری است که در فواصل زمانی مساوی و منظمی جمع‌آوری شده باشند. تعیین الگوی مناسب یکی از مسائل مهم در مدل‌سازی و پیش‌بینی سری‌های زمانی، با توجه به مکانیسم سیستم موردنظر است. اغلب، بدون بررسی خطی یا غیرخطی بودن سیستم، از مدل‌های راجع خطی سری زمانی استفاده می‌شود.

### حل فعالیت صفحه ۵۰

(الف)



در فاصله دی ۹۱ تا خرداد ۹۳ و همچنین در فاصله دی ۹۴ تا دی ۹۶ روند افزایشی بوده، ولی در فاصله بین خرداد ۹۳ تا دی ۹۴ روند کاهشی بوده است. چون مقدار شاخص کل در آن فاصله افزایش یا کاهش یافته است.

(ب)

n امین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
f(n) مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵	۳۷/۵	۵۸/۳	۷۵	۷۰	۶۰	۵۰	۵۸/۳	۷۰	۸۵	۱۰۰

ج) گزینه ۳.

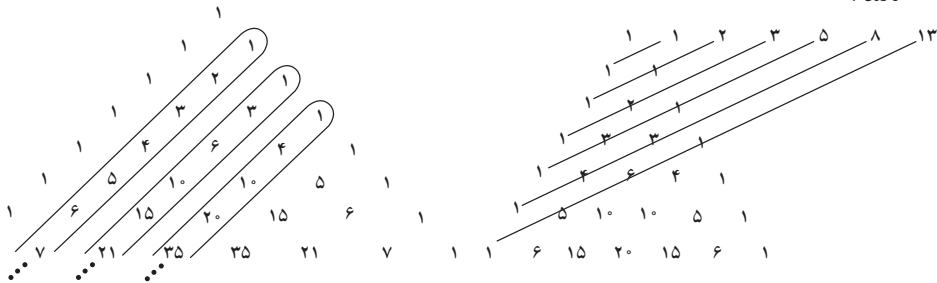
$$A(7, 50) \text{ , } B(11, 100) \rightarrow m_{AB} = \frac{100 - 50}{11 - 7} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$y - 50 = \frac{25}{2}(x - 7) \xrightarrow{x=13} y - 50 = \frac{25}{2} \times 6 \rightarrow y = 75 + 50 = 125 \text{ (۱۲۵ هزار)}$$

در صفحه ۵۱، مطلب خواندنی در مورد شاخص بورس بیان شده است، که در واقع این مطلب می تواند مکمل مبحث شاخص بورس در کتاب اقتصاد باشد که دانش آموزان با آن آشنایی دارند و محاسبه شاخص سهام کل را با توجه به این مطلب به خوبی درک می کنند.

در فعالیت صفحه ۵۲، با استفاده از مفهوم الگو و تابع، که دانش آموزان در سال های قبل با آن آشنایی دارند، مفهوم دنباله بیان و تشریح می شود. در این فعالیت با استفاده از مثلث خیام، الگویی از اعداد معرفی می شود و در ادامه رابطه بازگشتی و ضابطه جمله  $n$ ام این الگو خواسته شده است. هدف این است که دانش آموزان با مفهوم رابطه بازگشتی آشنا شده و تفاوت آن با نمایش تابعی دنباله را تشخیص دهند و همچنین بدانند که اگر در رابطه بازگشتی، جمله اول داده شود، فقط یک دنباله تشکیل می شود ولی اگر رابطه بازگشتی بدون جمله اول باشد، تعداد نامتناهی دنباله می توان تشکیل داد. نگرش دقیق و یافتن الگوها، مهارت مهمی است که توجه به آن برای حل مسائل و به طور کلی کشف ایده های ریاضی در پدیده های واقعی ضرورت دارد. می توان برای ایجاد رغبت دانش آموزان به یادگیری، به صورت فعالیتی از آنها خواسته شود که الگوهای دیگری که در مثلث خیام وجود دارد را پیدا کنند.

مانند :



دنباله اعداد طبیعی، اعداد مثلثی و اعداد چهاروجهی

انتهای پیکان ها نشانگر دنباله اعداد فیبوناچی است.

کلمه دنباله در ریاضیات، اصطلاحی است که یک مجموعه از اشیایی را مشخص می کند که با ترتیبی آراسته شده باشند. در صفحه ۵۳، در قسمت تعریف دنباله، نمایش ماشینی تابع (دنباله) را نشان می دهد، که از یک ورودی، یک سیستم انجام عملیات ریاضی و یک خروجی تشکیل شده است، که چنانچه ورودی که همان اعضای دامنه دنباله است، مجموعه اعداد طبیعی باشد، سیستم این ماشین (ضابطه دنباله)، جملات

دنباله را می‌سازد و در خروجی، دنباله ای نامتناهی (اعضای برد دنباله) خارج می‌شوند. هر گاه دامنه دنباله، قطعه‌ای از اعداد طبیعی باشد، دنباله متناهی خواهد بود.

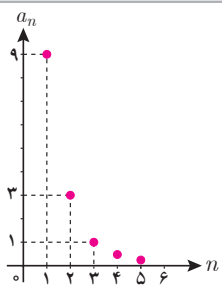
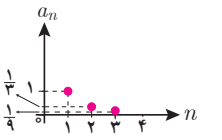
در صفحه ۵۴، کاردر کلاسی مطرح شده و هدف این است که دانش آموزان با توجه به ضابطه تابعی دنباله که می‌تواند از انواع توابعی که با آن آشنایی دارند باشد، جملات دنباله را بسازند. همچنین مثالی مطرح شده تا دانش آموزان به درک بهتری از رابطه بازگشتی و ضابطه تابعی دنباله برسند.

در صفحه ۵۵، مبحث رسم دنباله همراه با مثال‌های متنوع مطرح می‌شود و نشان می‌دهد که جمله عمومی دنباله از هر نوع تابعی که باشد، چون دامنه‌اش مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است، نمودار آن به صورت نقطه نقطه (گسسته) رسم می‌شود.

هدف از کار در کلاس صفحه ۵۶ این است که دانش آموزان حالت‌های مختلف نمایش یک دنباله (نوشتن جملات دنباله، رابطه بازگشتی، ضابطه دنباله و رسم نمودار آن) را یاد گرفته و درک کنند. نمایش‌های مختلف از یک مفهوم و رابطه‌های بین آنها، در درک مفاهیم و حل مسائل کارساز است.

### حل کاردر کلاس صفحه ۵۶

جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 3^{3-n}$	$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ $a_1 = 9$	$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
	$a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$	$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

$3, 5, 7, 9, \dots$	$a_n = a_{n-1} + 2$ $a_1 = 3$	$a_n = 2n + 1$	
$1, 2, 4, 7, \dots$	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$		
$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$		$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$	
$-1, -4, -9, -16, \dots$		$a_n = -n^2$	
$1, 1, 2, 3, 5, \dots$	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$		

## توصیه‌های آموزشی

■ در پاورقی صفحه ۵۶، دنباله فیبوناچی معرفی شده است. پیشنهاد می‌شود برای ایجاد انگیزه و علاقه‌مند نمودن دانش آموزان به یادگیری، از آنان خواسته شود تحقیقی در مورد دنباله‌های معروف مانند دنباله فیبوناچی انجام داده و در کلاس ارائه دهند.

■ بهتر است برای حل فعالیت‌ها در کلاس، به روش پرسش و پاسخ با دانش آموزان گفتگو شود تا به این طریق آنان تفکرات ریاضی خود را توصیف و سازماندهی کنند و استحکام بخشند. همچنین از راهبردهای متنوع حل مسئله برای فهمیدن و درک محتوای مفهومی ریاضی استفاده شود.

■ فراهم آوردن فرصت‌هایی که دانش آموزان از طریق فعالیت‌های فردی/گروهی و با هدایت و راهنمایی معلم به یادگیری مطلوب دست یابند.

## اشتباهات رایج دانش آموزان

■ هنگام مدل سازی وضعیت‌های مختلف با نمادها و زبان ریاضی، ممکن است دچار اشتباه شوند.  
 ■ عدم تشخیص درست برای یافتن دامنه توابع مدل شده ریاضی.  
 ■ برای به دست آوردن جمله عمومی برخی از دنباله‌ها، به صورت رابطه بازگشتی یا نمایش تابعی دنباله، معمولاً دچار اشتباه می‌شوند. چون در فرمول جمله عمومی که به دست می‌آورند، مقادیر به ازای  $n = 1, 2, 3, \dots$  را در آن امتحان نمی‌کنند که با توجه به جملات دنباله داده شده، فرمول جمله عمومی که به دست آورند، درست است یا نیست.

### حل تمرینات درس اول (صفحه ۵۷ کتاب)

۱ ■ برای محاسبه قبض آب (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و براساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف  $\times$  میانگین مصرف = آب‌بها

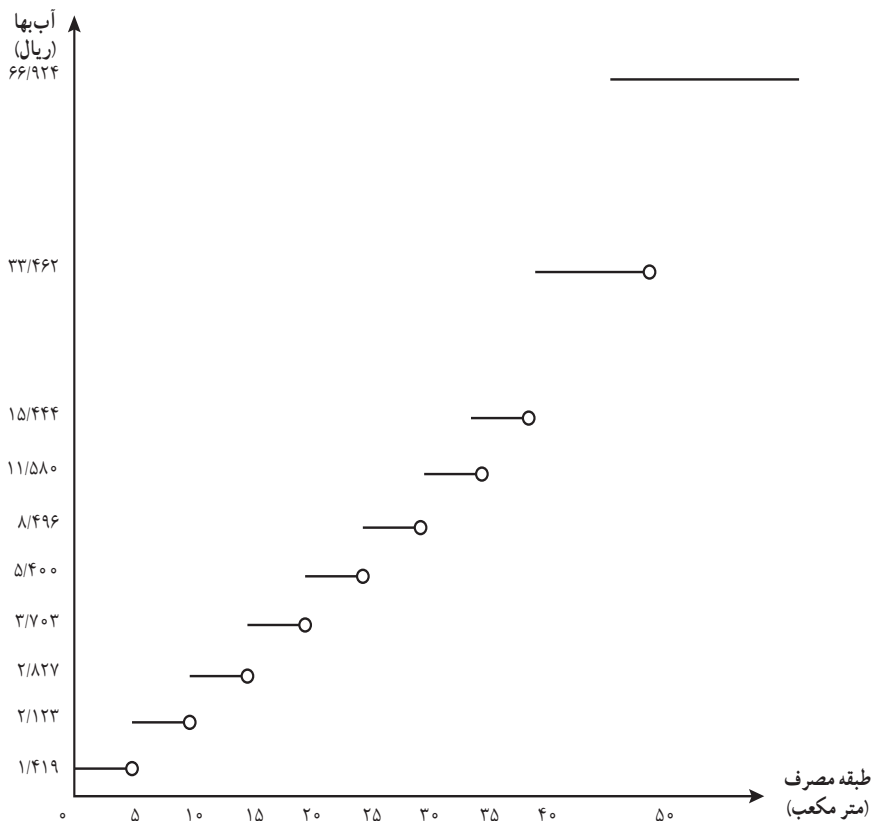
\* جدول ۱- محاسبه آب‌بها براساس طبقات مصرف در استان تهران

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸/۴۹۶	$25 \leq x < 30$	۱/۴۱۹	$0 \leq x < 5$
۱۱/۵۸۰	$30 \leq x < 35$	۲/۱۲۳	$5 \leq x < 10$
۱۵/۴۴۴	$35 \leq x < 40$	۲/۸۲۷	$10 \leq x < 15$
۳۳/۴۶۲	$40 \leq x < 50$	۳/۷۰۳	$15 \leq x < 20$
۶۶/۹۲۴	$x \geq 50$	۵/۴۰۰	$20 \leq x < 25$

\*. در ایران مشترکان تقریباً  $\frac{1}{3}$  هزینه واقعی تولید آب را می‌پردازند. هزینه آب در مقایسه با کشورهای منطقه و جهان در ایران بسیار پایین است. (تأکید بر مصرف بهینه آب توسط این سؤال به دانش آموزان)

الف) نمودار «طبقه مصرف – آب‌بها» جدول صفحه قبل را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1/49 & 0 \leq x < 5 \\ 2/123 & 5 \leq x < 10 \\ 2/827 & 10 \leq x < 15 \\ 3/703 & 15 \leq x < 20 \\ 5/400 & 20 \leq x < 25 \\ 8/496 & 25 \leq x < 30 \\ 11/580 & 30 \leq x < 35 \\ 15/444 & 35 \leq x < 40 \\ 33/462 & 40 \leq x < 50 \\ 66/924 & x \geq 50 \end{cases}$$

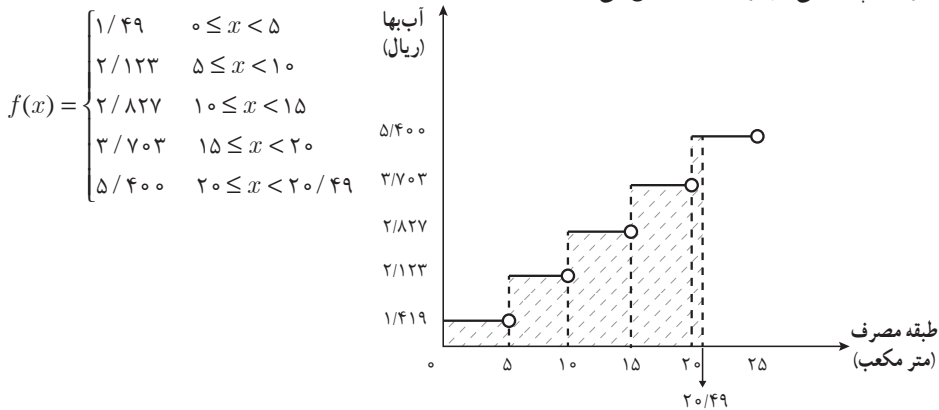


دامنه:  $x \geq 0$

برد:  $\{1/49, 2/123, 2/827, 3/703, 5/400, 8/496, 11/580, 15/444, 33/462, 66/924\}$



(ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی در تهران برای یک ماه  $۲۰/۴۹ \text{ m}^3$  باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی آب بها را مشخص می‌کند؟



$$\text{آب بها} = ۵ \times ۱/۴۹ + ۵ \times ۲/۱۲۳ + ۵ \times ۲/۸۲۷ + ۵ \times ۳/۷۰۳ + ۰/۴۹ \times ۵/۴۰۰ = ۵۳/۰۰۶$$

۲ اگر تابع  $f$  مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

- ☐ N      ☒ R  
☒ N      ☐ R  
☐ N      ☒ R  
☐ N      ☒ R  
☒ N      ☐ R

(الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

(ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

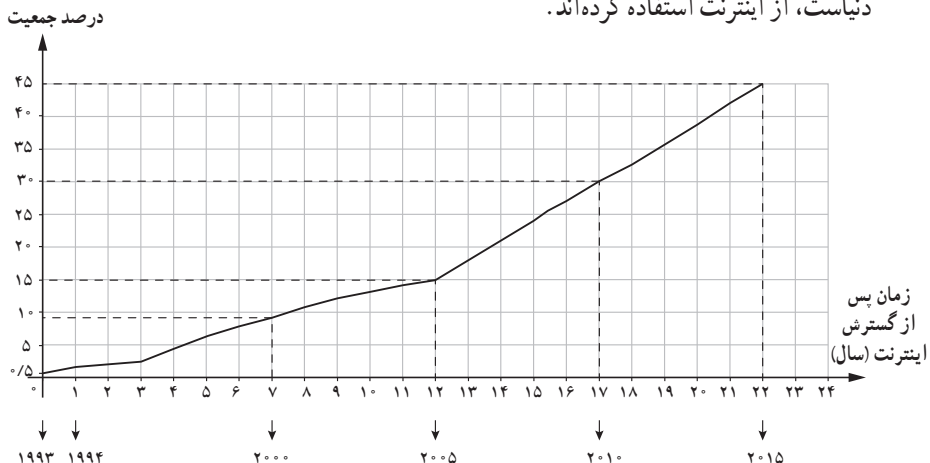
(ج) حجم مکعبی به ضلع  $x$

(د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

(ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

۳ نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در

دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند.



الف) اگر  $f(n)$  درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان،  $n$  سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر  $f(1)$  و  $f(7)$  را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

درصد جمعیت استفاده کنندگان از اینترنت در جهان، یک سال پس از گسترش اینترنت برابر  $5^\circ$  می باشد

$$f(1) = 5^\circ$$

درصد جمعیت استفاده کنندگان از اینترنت در جهان، هفت سال پس از گسترش اینترنت برابر  $9^\circ$  می باشد.

$$f(7) = 9$$

ب) با توجه به مدل خطی استفاده کنندگان از اینترنت از سال  $5^\circ 20'$  تا  $15^\circ 20'$  با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال  $20^\circ 20'$  درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

$$(12, 15), (22, 45) \rightarrow m = \frac{45 - 15}{22 - 12} = 3$$

$$y - 15 = 3(x - 12) \rightarrow y = 3x - 21$$

با توجه به محور طول ها، سال  $20^\circ 20'$  عدد  $27$  می باشد :

$$y = 3 \times 27 - 21 = 81 - 21 = 60^\circ$$

۲ اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی  $y = 4x - 1$  پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله :

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

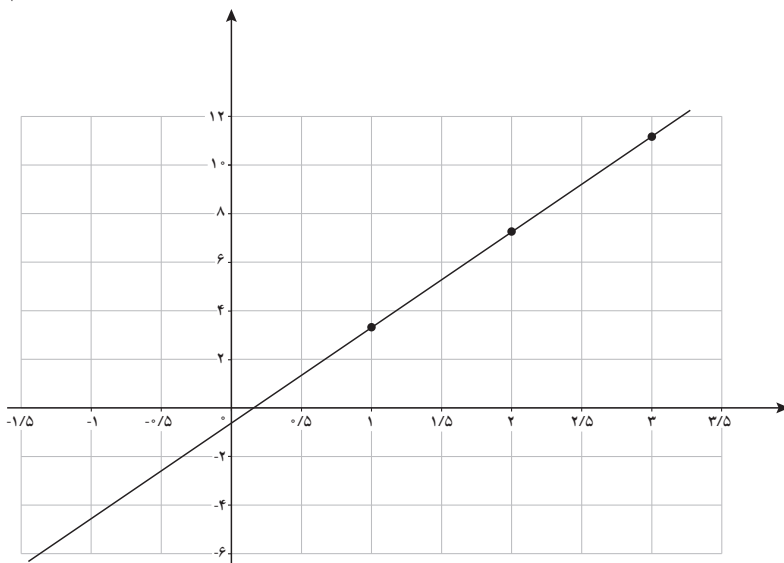
$$y = 4x - 1$$

$$a_n = 4n - 1$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 7$$

$$a_3 = 11$$



ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

جملات دنباله  $3, 7, 11, 15, \dots$

نمایش تابعی دنباله  $a_n = 4n - 1$

رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = a_n + 4$  ,  $a_1 = 3$

شیب خط همان اختلاف مشترک بین دو جمله متوالی در این رابطه بازگشتی است.

۵ با توجه به دنباله‌های  $a_n = 3^n$ ,  $b_n = (-\frac{1}{3})^{n+1}$ ,  $c_n = \frac{1}{3^n}$ ,  $d_n = n^2 - 1$  حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف)  $a_7 + b_1$       ب)  $c_7 - d_1$       ج)  $b_7 + d_7$

الف)  $a_7 + b_1 = 3^7 + (-\frac{1}{3})^2 = \frac{37}{4}$

ب)  $c_7 - d_1 = \frac{1}{3^7} - 0 = \frac{1}{3^7}$

ج)  $b_7 + d_7 = (-\frac{1}{3})^{8+1} + 7^2 - 1 = \frac{95}{3^7}$

۶ جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف)  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$  ,  $a_1 = -2$

ب)  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$  ,  $a_1 = 1$

ج)  $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$  ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د)  $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$  ,  $a_1 = 1$

الف)  $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, -\frac{2}{81}$

ب)  $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$

ج)  $1, 1, 1, 3, 5$

د)  $1, 0, 1, 0, 1$

۷ جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...	$a_{n+1} = a_n + 3$ $a_1 = 5$	$a_n = 3n + 2$	
۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...	$a_{n+1} = \frac{4}{a_n}$ $a_1 = 4$		$a_n = \begin{cases} 4 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 5, \frac{1}{4}, \dots$			$a_n = \begin{cases} n & \text{فرد } n \\ \frac{1}{n} & \text{زوج } n \end{cases}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$		$a_n = \frac{n}{n+1}$	

۸ شش جمله اول دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$  را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف)  $a_1 = 11$     ۱۱, ۳۴, ۱۷, ۵۲, ۲۶, ۷۹, ...

ب)  $a_1 = 25$     ۲۵, ۷۶, ۳۸, ۱۱۵, ۵۷/۵, ۱۷۳/۵, ...

۹ نمودار دنباله‌های زیر را برای  $n \leq 5$  رسم کنید.

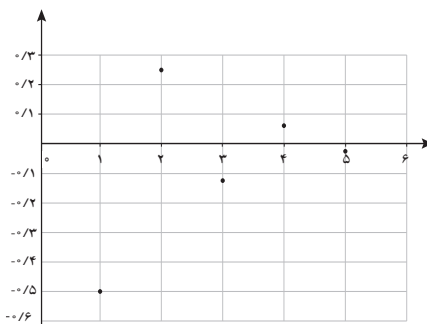
الف)  $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

$n$	۱	۲	۳	۴	۵
$a_n$	۲/۵	۲	۱/۵	۱	۱/۲



ب)  $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

$n$	۱	۲	۳	۴	۵
$a_n$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$



ج)  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2$

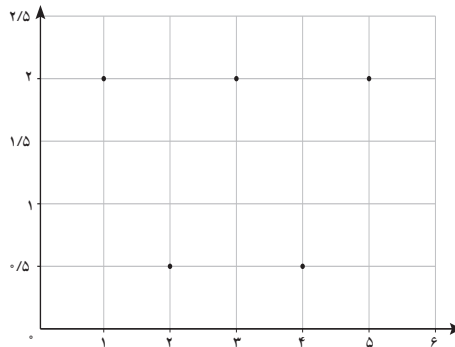
$a_1 = 2 \quad (1, 2)$

$a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} \quad (2, \frac{1}{2})$

$a_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad (3, 2)$

$a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2} \quad (4, \frac{1}{2})$

$a_5 = \frac{1}{a_4} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad (5, 2)$



د)  $a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

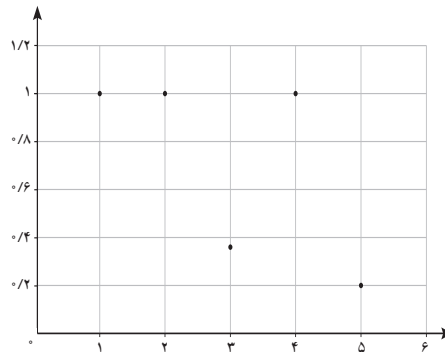
$a_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad (1, 1)$

$a_2 = 1 \quad (2, 1)$

$a_3 = \frac{1}{3} \quad (3, \frac{1}{3})$

$1 \quad (4, 1)$

$a_5 = \frac{1}{5} \quad (5, \frac{1}{5})$



۱۰ محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل — با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به‌طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد  $k$  یعنی  $\sqrt{k}$  نزدیک شویم.

$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر  $a_r$  را تقریبی برای  $\sqrt{k}$  در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف)  $\sqrt{2}$

ب)  $\sqrt{3}$

ج)  $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

الف)  $k = 2 \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad , \quad a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{k}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12} \approx 1/416$$

ب)  $k = 3 \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right)$  ,  $a_1 = 3$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{3}{3} \right) = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{3}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4} \approx 1/75$$

ج)  $k = 5 \rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{5}{a_n} \right)$  ,  $a_1 = 5$

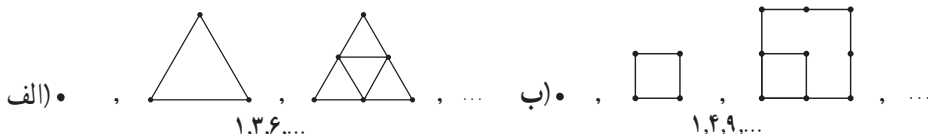
$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{5}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 5 + \frac{5}{5} \right) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{5}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{14}{6} \approx 2/33$$

ماشین حساب حاصل جذر (ریشه دوم) یک عدد را فقط به صورت اعشاری نشان می دهد و گرد می کند. مزیت این روش این است که جذر یک عدد را به صورت عددی گویا نشان می دهد و می توان به جذر یک عدد نزدیک شد.

۱۱ جملات دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ,  $a_1 = 1$  را س کدام یک از الگوهای زیر را مشخص

می کنند؟



$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + (1+1) = 1+2=3$$

$$a_3 = a_2 + (2+1) = 3+3=6$$

۱۲ مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس مانده های صنعتی کارخانه ها به یک دریاچه، ۲۵٪ فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه ۱۰٪ فاضلاب

صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی اثر می کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است. اگر  $P_1 = ۲۵۰$  میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

$$P_{n+1} = (P_n + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰}, \quad P_1 = ۲۵۰$$

$$P_2 = (P_1 + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۵۰ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۳۸ / ۵$$

$$P_3 = (P_2 + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۳۸ / ۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۲۸ / ۱۵$$

$$P_4 = (P_3 + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۲۸ / ۱۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۱۸ / ۸۳۵$$

$$P_5 = (P_4 + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۱۸ / ۸۳۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۱۰ / ۴۵۱۵$$

$$P_6 = (P_5 + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = (۲۱۰ / ۴۵۱۵ + ۱۵) \times \frac{۹}{۱۰} = ۲۰۲ / ۹۰۶۳۵$$

### بازی و ریاضی

آیا می توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

$$a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}} \quad a_1 = a_2 = 1$$

ده جمله اول این دنباله: ۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶

## دنباله حسابی

## اهداف درس دوم

- ۱ تشخیص ارتباط مفهومی میان مفاهیم الگوهای خطی و دنباله حسابی.
- ۲ آشنایی با مفهوم دنباله حسابی و یافتن اختلاف مشترک آن.
- ۳ شناسایی و تشخیص دنباله حسابی در بین دنباله‌ها و به دست آوردن جمله عمومی آن.
- ۴ آشنایی با قواعد دنباله حسابی و به کارگیری آنها در حل مسائل.
- ۵ شناخت کاربرد مفهوم دنباله حسابی در برخی پدیده‌های دنیای واقعی.
- ۶ مهارت در یافتن مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی.

## روش تدریس

در صفحه ۶۱، ورود به مطلب درس با فعالیتی که مسئله‌ای عینی و کاربردی است، آغاز می‌شود و هدف آن نشان دادن ارتباط مفهومی میان دنباله‌های حسابی و الگوهای خطی می‌باشد. همچنین تأثیر دامنه و برد در رفتار تابع با توجه به نمودار آن را یادآوری می‌کند.

## حل فعالیت صفحه ۶۱

(الف)

$$(۹۶۰ \text{ و } ۱۰) \text{ و } (۶۰ \text{ و } ۰)$$

$$m = ۹۰ \quad : \quad y - ۶۰ = ۹۰(x - ۰)$$

$$\rightarrow y = ۹۰x + ۶۰$$

$$D = \{x | x \in \mathbb{R}, ۰ \leq x \leq ۱۰\}$$

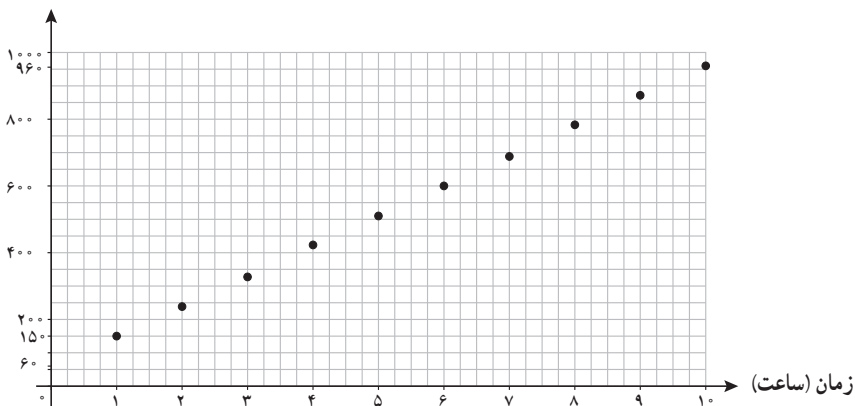
$$R = \{y | y \in \mathbb{R}, ۶۰ \leq y \leq ۹۶۰\}$$



نمودار (۲)

(ب)

فاصله تا بندرعباس (کیلومتر)



(ج)

$$y = 90x + 60$$

$$D = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$R = \{150, 240, 330, 420, 510, 600, 690, 780, 870, 960\}$$

ضابطه‌ها تفاوتی ندارند.

دامنه و برد نمودار (۱) متعلق به قطعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی است، اما دامنه و برد نمودار (۲) متعلق به قطعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

(د)

جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$60 + 125 = 185$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	$185 + 145 = 330$
گل گهر - سیرجان	۶۰	$330 + 60 = 390$
سیرجان - میمند	۱۵۵	$390 + 155 = 545$
میمند - بافق	۱۴۵	$545 + 145 = 690$
باقق - جندق	۱۳۰	$690 + 130 = 820$
جندق - طبس	۱۴۰	$820 + 140 = 960$

(هـ)

جدول ۲

$n=۱$	$n=۲$	$n=۳$	$n=۴$	$n=۵$
$a_۱ = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰$	$a_۲ = a_۱ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۹۰ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۲ \times ۹۰ = ۲۴۰$	$a_۳ = a_۲ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۲ \times ۹۰ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۳ \times ۹۰ = ۳۳۰$	$a_۴ = a_۳ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۴ \times ۹۰$ $= ۴۲۰$	$a_۵ = a_۴ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۵ \times ۹۰$ $= ۵۱۰$

$n=۶$	$n=۷$	$n=۸$	$n=۹$	$n=۱۰$
$a_۶ = a_۵ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۶ \times ۹۰$ $= ۶۰۰$	$a_۷ = a_۶ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۷ \times ۹۰$ $= ۶۹۰$	$a_۸ = a_۷ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۸ \times ۹۰$ $= ۷۸۰$	$a_۹ = a_۸ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۹ \times ۹۰$ $= ۸۷۰$	$a_{۱۰} = a_۹ + ۹۰$ $= ۶۰ + ۱۰ \times ۹۰$ $= ۹۶۰$

(و)

ایستگاه‌های گل گهر، بافق و طبس. با توجه به جدول ۱، فاصله ایستگاه‌ها تا بندرعباس مشخص می‌شود و طبق جدول ۲،  $a_n$  مسافت طی شده قطار در  $n$  ساعت پس از ترک ایستگاه است، یعنی تا ایستگاه گل گهر ۳ ساعت، تا ایستگاه بافق ۷ ساعت و تا ایستگاه طبس ۱۰ ساعت زمان سپری شده است و این ایستگاه‌ها محل تماس راهبر قطار می‌باشند.

(ز)

$$\begin{cases} a_۳ = a_۲ + ۹۰ \\ a_۳ = a_۱ + ۲ \times ۹۰ \end{cases} \quad \begin{cases} a_{۱۱} = a_{۱۰} + ۹۰ \\ a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰ \times ۹۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_۷ = a_۶ + ۹۰ \\ a_۷ = a_۱ + ۶ \times ۹۰ \end{cases} \quad \begin{cases} a_۸ = a_۷ + ۶ \times ۹۰ \\ a_۸ = a_۵ + ۳ \times ۹۰ \end{cases}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} a_n &= a_۱ + (n-۱) \times ۹۰ & (۱) \\ a_n - a_{n-۱} &= ۹۰ & (\text{رابطه بازگشتی}) \\ a_n - a_m &= (n-m) \times ۹۰ \end{aligned}$$

(ح) اختلاف هر دو جمله متوالی ثابت است.

(ط) هر دو به صورت الگوی خطی هستند.

دانش‌آموزان با حل این فعالیت به مفهوم دنباله حسابی پی می‌برند. این فعالیت نشان می‌دهد که دنباله حسابی همان الگوی خطی است و در این دنباله اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است که به آن

اختلاف مشترک می‌گویند. پس از نتیجه‌گیری از حل این فعالیت، در صفحه ۶۳، تعریف کاملی از دنباله حسابی و ویژگی و فرمول جمله عمومی آن بیان شده است.

هدف از کار در کلاس‌های صفحه ۶۴، این است که دانش‌آموزان در حل مسئله ریاضی و حل مسائلی از دنیای واقعی مربوط به بحث دنباله حسابی توانایی کسب نمایند. در قسمت ۲ کاردرکلاس اول، به تأثیر اختلاف مشترک،  $d$ ، در جملات دنباله حسابی اشاره می‌کند، اگر  $d$  مثبت باشد دنباله افزایشی، اگر  $d$  منفی باشد دنباله کاهشی و اگر  $d$  صفر باشد دنباله ثابت است.

### حل کار در کلاس دوم صفحه ۶۴

اگر  $a_n$  عمق چاه حفر شده  $n$ ام تا سطح کانال قنات باشد، با توجه به پرسش، عمق هر چاه نسبت به چاه پیشین نیم متر کاهش یافته است. پس:

$$a_1 = 3^\circ, \quad a_2 = 29/5, \quad a_3 = 29, \quad \dots, \quad a_n = 1/5$$

در این صورت  $a_1 = 3^\circ, a_n = 1/5, d = -\frac{1}{4}$ :

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 1/5 = 3^\circ + (n-1) \times (-\frac{1}{4}) \rightarrow n-1 = 57 \rightarrow n = 58$$

۵۸ چاه حفر شده که شامل یک مادر چاه و ۵۷ میله چاه است.

در صفحه ۶۵، برای اطلاعات عمومی و ترغیب دانش‌آموزان به یادگیری، مطلب خواندنی مرتبط با مسئله قنات که مربوط به تاریخچه قنات در ایران می‌باشد، بیان شده است، تا به این طریق دانش‌آموزان کاربرد مفاهیم ریاضی در پدیده‌های محیط پیرامون و زندگی روزمره را به خوبی درک نمایند.

هدف از کاردرکلاس صفحه ۶۶، این است که نشان دهد شیب خط در تابع خطی، همان اختلاف مشترک دنباله حسابی است.

در صفحه ۶۷، نمایش‌های مختلف ریاضی برای درک مفهوم دنباله حسابی مطرح شده است و هدف این است که دانش‌آموزان شباهت ضابطه دنباله با معادله خط و تفاوت دامنه و برد آنها را درک کنند. همچنین تأکید شود برای تشخیص دنباله حسابی از روی نمودار، همه نقاط به مختصات  $(n, a_n)$  که  $n \in N$ ، روی یک خط واقع هستند.

### حل فعالیت صفحه ۶۸

(الف)

$$a_1 = 25^\circ - 15 = 235, \quad a_n = 13^\circ, \quad d = -15$$

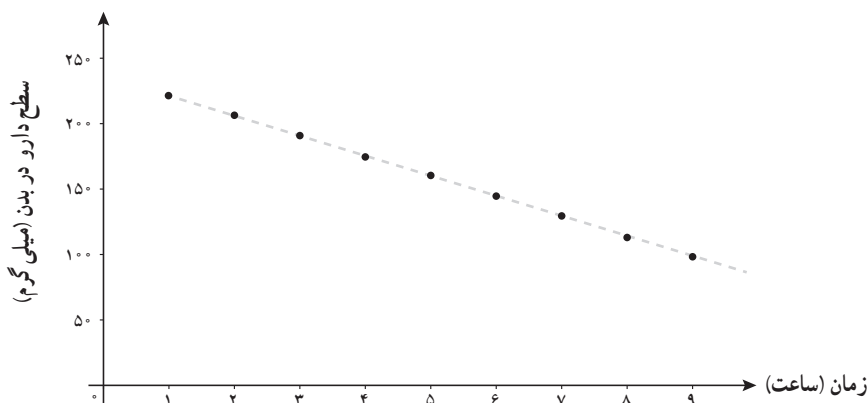
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$۱۳^{\circ} = ۲۳۵ + (n-1) \times (-۱۵)$$

(۸ ساعت پس از مصرف دارو)  $-۱۰۵ = -۱۵n + ۱۵ \rightarrow -۱۵n = -۱۲۰ \rightarrow n = ۸$

(ب)

$n$ زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	...
$a_n$ سطح دارو در بدن پس از $n$ ساعت	۲۳۵	۲۲۰	۲۰۵	۱۹۰	۱۷۵	۱۶۰	۱۴۵	۱۳۰	۱۱۵	...



(ج)

پس از ۵ ساعت، میزان داروی قبلی در بدن = ۱۷۵ میلی گرم

میزان داروی قرص جدید = ۲۵۰ میلی گرم

$a_1 = ۴۲۵ \rightarrow$  میلی گرم  $۱۷۵ + ۲۵۰ = ۴۲۵$  : پس از مصرف قرص جدید

$$۱۳^{\circ} = ۴۲۵ + (n-1) \times (-۱۵) \rightarrow n-1 = \frac{۵۹}{۳} \rightarrow n = \frac{۶۲}{۳} = \frac{۶۳}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۲۱ - \frac{۱}{۳}$$

یعنی پس از بیست ساعت و چهل دقیقه بعد از خوردن قرص دوم، سطح دارو در بدن او  $۱۳^{\circ}$  میلی گرم خواهد شد.

حل کار در کلاس صفحه ۶۸

$$۲۶,۰۰۰ \times \frac{۹}{۱۰} = ۲,۳۴,۰۰۰ \rightarrow a_1 = ۲,۳۴,۰۰۰ + ۱۱,۰۰۰ = ۲,۳۵۱,۰۰۰$$

پس از یک ساعت اضافه کاری

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow ۳,۰۰۰,۰۰۰ = ۲,۳۵۱,۰۰۰ + (n-1) \times ۱۱,۰۰۰$$

$$۶۴۹,۰۰۰ = (n-1) \times ۱۱,۰۰۰ \rightarrow n-1 = ۵۹ \rightarrow n = ۶۰ \text{ ساعت}$$

طبق فرض مسئله، ماه  $۳۰$  روزه در نظر گرفته شده است. پس یعنی  $۲ = ۳۰ \div ۶۰$  روزی ۲ ساعت اضافه کاری داشته باشد تا دریافتی او ۳ میلیون تومان شود.

در صفحه ۶۹، مبحث مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله عددی (حسابی) با روش محاسبه گاوس، برای حل مسئله «محاسبه تعداد روز کاری یک مقنی برای حفر چاه‌های قنات» مطرح شده است، تا دانش آموزان استدلال رابطه مجموع جملات دنباله حسابی را به طور شهودی درک کرده و سطح مطلوبی از یادگیری در آنان ایجاد گردد. سپس با نتیجه‌گیری از این فعالیت، رابطه مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی بیان می‌شود. هدف این است که از طریق حل این گونه مسئله‌ها، یادگیری معنادار صورت گیرد و مسیر و جریان رشد و توسعه مفهومی ریاضی را آشکار سازند.

در کاردر کلاس صفحه ۷۰، سؤالات متنوعی برای تعیین مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی مطرح شده است.

### حل کار در کلاس صفحه ۷۰

۱

(الف)

$$n = \frac{۱۹۹ - (-۱)}{۵} + ۱ = ۴۱ \rightarrow S_{۴۱} = \frac{۴۱}{۲}(-۱ + ۱۹۹) = ۲۰/۵ \times ۱۹۸ = ۴۰۵۹$$

(ب)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -۲ \\ a_2 = ۵ + a_1 = ۵ + (-۲) = ۳ \\ a_3 = ۵ + a_2 = ۵ + ۳ = ۸ \\ a_4 = ۵ + a_3 = ۵ + ۸ = ۱۳ \\ \vdots \end{array} \right\} \rightarrow S_{10} = \frac{۱۰}{۲}(۲ \times (-۲) + (۱۰ - ۱) \times ۵) = ۲۰۵$$

۲

$$a_1 = ۱ \quad a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{۳۰} = a_1 + (۳۰ - ۱)d = ۱ + ۲۹ \times ۲ = ۱ + ۵۸ = ۵۹$$

$$S_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}(a_1 + a_{۳۰}) = ۱۵ \times (۱ + ۵۹) = ۱۵ \times ۶۰ = ۹۰۰$$

۳

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-1)d) \rightarrow ۸۷۰ = \frac{n}{۲}(۲ \times ۱۵ + (n-1) \times ۳)$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۱۷۴۰ = ۳۰n + ۳n^2 - ۳n \rightarrow ۳n^2 + ۲۷n - ۱۷۴۰ = ۰$$

$$\xrightarrow{+3} n^2 + 9n - 580 = 0 \rightarrow \Delta = (9)^2 - 4(1)(-580) = 81 + 2320 = 2401$$

$$n = \frac{-9 \pm 49}{2} \rightarrow \begin{cases} n = \frac{-9 + 49}{2} = \frac{40}{2} = 20 & \text{بیست ردیف} \\ n = \frac{-9 - 49}{2} = \frac{-58}{2} = -29 & \text{(غیر قابل قبول)} \end{cases}$$

## توصیه‌های آموزشی

- برای ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان به یادگیری درس، با توجه به نمونه مسائلی از دنیای واقعی که در فعالیت‌ها و تمرینات این فصل مطرح شده است، ترغیب شوند با دقت به محیط پیرامون خود، مثال‌هایی که مرتبط با موضوع و مفاهیم درس است را یافته و در کلاس ارائه دهند. این روش به پرورش خلاقیت دانش‌آموزان نیز کمک خواهد نمود.
- با روش گفتمان ریاضی در کلاس، یعنی ارتباط کلامی دانش‌آموزان با یکدیگر و با معلم، باعث می‌شود معلم با بسیاری از تفکرات، ایده‌ها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان آشنا شده و امکان برطرف کردن آنها را در کلاس و با مشارکت دیگر دانش‌آموزان پیدا کند. این مستلزم تمرکز و بازتاب بر فرایند حل مسئله ریاضی و به ویژه پس از ارائه پاسخ از طرف دانش‌آموزان است.
- با نشان دادن ارتباط میان مفاهیم ریاضی مطرح شده، می‌توان دانش‌آموزان را در تثبیت و تعمیق مفاهیم آموزش داده شده، یاری نمود.
- برای حل مسئله‌ها و تمرینات کتاب، دانش‌آموزان را محدود به استفاده از یک روش خاص نکنیم و اجازه دهیم از روش‌های درست دیگر برای حل مسئله استفاده کنند.
- سطح سؤالات ارزشیابی از محدوده مطالب کتاب فراتر نرود و در سطح مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- معمولاً در رسم نمودار دنباله حسابی، به اشتباه نقاط را به هم وصل می‌کنند.
- ممکن است در تشخیص و شناسایی اینکه کدام نمودار از دنباله‌ها، مربوط به دنباله حسابی است، دچار اشتباه شوند.
- برخی از دانش‌آموزان فقط فرمول حفظ می‌کنند بدون اینکه درک درستی از مفهوم و ویژگی مربوط به آن را داشته باشند و دچار بدفهمی و اشتباه می‌شوند.
- ممکن است در حل مسئله‌ها بر اثر بی‌دقتی، خطاهای محاسباتی داشته باشند.

### حل تمرینات درس دوم (صفحه ۷۱ کتاب)

۱ با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف)  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$   $a_1 = 2$  دنباله حسابی نیست.

ب)  $a_{n+1} = a_n + 5$   $a_1 = -1$   $-1, 4, 9, 14, \dots$  دنباله حسابی است.

ج)  $a_{n+1} = 5a_n + 1$   $a_1 = -1$   $-1, -4, -19, -94, \dots$  دنباله حسابی نیست.

د)  $a_{n+1} - a_n = n$   $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3, a_5 - a_4 = 4$

دنباله حسابی نیست. زیرا اختلاف بین دو جمله متوالی ثابت نیست.

۲ در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$$a_1 = -5, d = 8, a_n = 555$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 555 = -5 + (n-1) \times 8$$

$$555 = -5 + 8n - 8 \rightarrow 8n = 568 \rightarrow n = 71$$

۳ یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

$$a_{11} = 52, a_{19} = 92 \rightarrow d = \frac{92-52}{19-11} = \frac{40}{8} = 5$$

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \rightarrow 52 = a_1 + 10 \times 5 \rightarrow a_1 = 2$$

$$a_{30} = a_1 + (30-1)d \rightarrow a_{30} = 2 + 29 \times 5 = 147$$

۴ برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل



مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

$$a_1 = 3, d = 5, n = 12$$

فاصله دوازدهمین چرخ تا موتور ۵۸ متر است. (شعاع دایره‌ای است که توسط این میله آبیاری می‌شود.)

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{12} = 3 + (12-1) \times 5 = 58$$

$$S = \pi r^2 \approx 3/14 \times (58)^2 = 10562/96 \text{ متر مربع}$$

۵ در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن  $۱۲۵۰۰$  گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین  $۱۸۷۵$  گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

$$a_1 = 12500 - 1875 = 10625, \quad d = -1875$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_6 = 10625 + (6-1) \times (-1875) = 1250$$

۶ میان دو عدد  $a$  و  $b$  عدد  $n$  را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله  $a$  تا  $b$  یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه  $d = \frac{b-a}{n+1}$  به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات  $(n+2)$  جمله است.)

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{n+2} - a_1}{n+2-1} = \frac{b-a}{n+1}$$

۷ براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد  $۱۰$  و  $۱۸$  قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

$$d = \frac{18-10}{3+1} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow 10, 12, 14, 16, 18$$

۸ مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

۴۰۱ و ..... و ۹ و ۵ و ۱ (الف)

۱۳ و ... و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹ (ب)

$$\text{الف) } n = \frac{401-1}{4} + 1 = 101 \rightarrow S_{101} = \frac{101}{2} (1 + 401) = 20301$$

$$\text{ب) } n = \frac{13-89}{-4} + 1 = 20 \rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} (89 + 13) = 1020$$



۹ باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان  $۱۲۵$  سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن  $۴۵$  سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله  $۱۰$  سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به



چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

$$d = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow -10 = \frac{45-125}{n+1} \rightarrow -10n-10 = 45-125 \rightarrow -10n = -70 \rightarrow n = 7$$

۷ پله بین دو پله قرار دارد، پس نردبان کلاً ۹ پله دارد.

طول پله‌ها:  $125 + 115 + \dots + 45$

$$S_9 = \frac{9}{2}(125+45) = 765 \quad \text{متر} \quad 765 \div 100 = 7/65 \text{ سانتی متر}$$

**۱۰ ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادر چاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر**

است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م)، ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله)  $120^\circ$  سانتی متر در نظر گرفته شود:

(الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

(ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل

قنات چقدر است؟

(ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی)  $250^\circ$  هزار تومان باشد، هزینه

حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

(د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه

به میانگین هزینه  $350^\circ$  هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی:  $a_n$

را عمق چاه  $n$ ام تا کانال قنات و  $a_1$  را عمق مادر چاه در نظر بگیرید.)

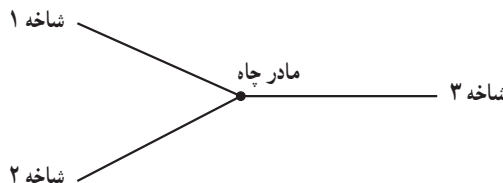
با فرض  $a_n = 120^\circ$  (الف)

$$\begin{cases} a_1 = 84/6 \times 100 = 8460 \text{ cm} \\ a_{56} = 78 \times 100 = 7800 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow d = \frac{7800 - 8460}{55} = -12 \text{ cm}$$

$$120^\circ = 8460 + (n-1) \times (-12) \rightarrow 12n = 8352 \rightarrow n = 696 \text{ تعداد میله}$$

$$\text{ب) } S_{696} = \frac{696}{2}(8460 + 120^\circ) = 2985840 \text{ cm} = 29858/4 \text{ m}$$

$$\text{مجموع طول کل چاه‌های حفر شده} = 3 \times 29858/4 - 2 \times 84/6 = 8940.6 \text{ m}$$



ج) هزینه  $c(x) = ۸۹۴۰۶ \times ۲۵۰۰۰۰ = ۲۲۳۵۱۵۰۰۰۰۰$

د) هزینه حفر کانال  $۷۱۰۰۰ \text{ m} \times \text{تومان } ۳۵۰۰۰۰ = ۲۴۸۵۰۰۰۰۰۰۰$

ارزش حفاری قنات زارچ:  $۲۴۸۵۰۰۰۰۰۰ + ۲۲۳۵۱۵۰۰۰۰۰ = ۴۷/۲۰۱/۵۰۰/۰۰۰$

## فصل ۳

### الگوهای غیر خطی



توابع نمایی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیواکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل‌ها، بیماری‌های واگیردار، شدت اصوات و زلزله‌ها کاربرد دارد.

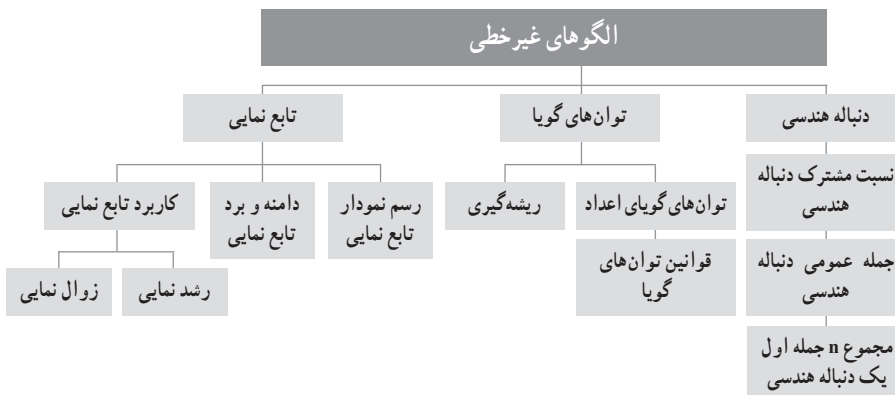
## نگاه کلی به فصل

در این فصل با مبحث الگوهای غیر خطی و کاربرد آنها در برخی زمینه‌های مختلف آشنا می‌شویم. این فصل شامل سه درس است، که در هر درس مدلی از الگوهای غیر خطی مطرح می‌شود. موضوع درس اول در مورد مبحث دنباله هندسی می‌باشد و ویژگی‌های خاص این دنباله، فرمول جمله عمومی و مجموع  $n$  جمله اول آن همراه با سؤالات متنوع و مسائلی از دنیای واقعی مطرح شده است. در دو درس بعدی به مباحث توان‌های گویا و تابع نمایی و مسائل مربوط به آنها پرداخته شده است. همه این مفاهیم مطرح شده به نوعی با هم در ارتباط هستند. به عنوان نمونه، رشد نمایی با یک تابع نمایی ساخته می‌شود و زمانی رخ می‌دهد که آهنگ رشد آن با مقدار تابع در هر لحظه متناسب باشد. حال اگر دامنه تابع از نقاط گسسته با فاصله‌های برابر ساخته شده باشد، گاهی به آن رشد هندسی هم می‌گویند. قبل از ورود به هر مبحثی از درس، فعالیت‌هایی مطرح شده است، سپس با جمع‌بندی از نتایج آن، مفاهیم جدید بیان می‌شوند. سعی شده است مسائلی از دنیای واقعی مرتبط با موضوع درس مطرح شود که دانش‌آموزان آنها را به خوبی درک کرده و بر اساس آنها به مفاهیم ریاضی و کاربردهای علوم دیگر و زندگی روزمره پی ببرند.

### اهداف کلی فصل الگوهای غیر خطی عبارت است از :

- ۱ آشنایی با الگوهای غیر خطی در برخی پدیده‌هایی از دنیای واقعی.
- ۲ آشنایی با مفهوم دنباله هندسی و ارتباط آن با الگوهای غیر خطی.
- ۳ به کارگیری مفهوم دنباله هندسی در توصیف پدیده‌های متفاوت محیط پیرامون و زندگی روزمره.
- ۴ نشان دادن ارتباط میان مفاهیم مطرح شده در درس‌ها.
- ۵ فراهم آوردن موقعیت حل مسئله برای فهمیدن و درک محتوای موضوعی و مفهومی ریاضی.

### نقشه مفهومی فصل سوم



## دانشتنی‌هایی برای معلم

در گذشته کاربرد ریاضیات محدود به تبیین پدیده‌هایی با رفتارهای خطی می‌شد. در این ریاضیات تنها پدیده‌ها و سیستم‌های دارای رفتار خطی قابل فهم و درک ریاضی بودند. معادلات خطی، توابع خطی، جبر خطی، برنامه‌ریزی خطی و شتاب‌دهنده‌های خطی عرصه‌هایی بودند که مورد تاخت و تاز ریاضی‌دانان و عالمان این دوره قرار داشتند. در حالی که جهان واقعی کاملاً غیرخطی است و تناسب و رفتارهای خطی در پدیده‌های روزمره به ندرت قابل مشاهده است. به این ترتیب چگونه می‌توان با منطق خطی، یک سیستم غیر خطی را درک کرد؟ سؤالی که باعث زایش ریاضیات جدیدی به نام نظریه آشوب و هندسه فرکتالی گردید که از شاخه‌های جدید ریاضیات با ارائه مفهوم جدیدی از بُعد فیزیکی و مفهومی مانند «خودهمانندی» است که در برابر تفسیر و شبیه‌سازی اشکال مختلف طبیعت انعطاف بی‌نظیری نشان داده است. فرکتال‌ها الگوهای غیرخطی ریاضی هستند و ساختاری هندسی دارند که با بزرگ کردن هر بخش از این ساختار به نسبت معین، همان ساختار نخستین به دست می‌آید. به گفتاری دیگر فرکتال ساختاری است که هر بخش از آن با کلش همانند است.

از منظر تاریخی مطالعه مباحث مربوط به هندسه فرکتالی به سده نوزدهم برمی‌گردد. کارل وایرستراس در سال ۱۸۶۱ وجود تابعی را نشان داد که در کلیه نقاط پیوسته هستند ولی در هیچ نقطه مشتق ندارد. ریاضی‌دانان آن زمان این تابع را به عنوان حالتی خاص و استثنایی تلقی نمودند. در سال ۱۸۹۰ پتانو، منحنی فضا پرکن خود را ارائه داد. ارائه این منحنی سبب تغییر نگرش نسبت به مفهوم بُعد گردید، چرا که تا پیش از آن، بُعد مجموعه را به عنوان تعداد متغیرهای مستقل مشخص کننده مجموعه تعریف می‌کردند. به عنوان نمونه مربع را جسم دو بعدی تصور می‌کردند، زیرا با دو متغیر طول و عرض مشخص می‌شود. ولی با توجه به منحنی پتانو، برای مشخص کردن مربع یک پارامتر نیز کافی است. در واقع تعداد ابعاد فضا در هندسه اقلیدسی همواره عددی صحیح (غیر اعشاری) است، اما در فضای فرکتالی می‌تواند عددی اعشاری هم باشد. به همین ترتیب به مرور زمان مجموعه‌های دیگری مانند مجموعه کانتور، مثلث سریپنسکی و... به دنیای ریاضیات ارائه شدند. گام دیگری که در این راستا برداشته شد، مطالعه تکرار توابع گویا در صفحه اعداد مختلط، توسط دو ریاضی‌دان فرانسوی به نام‌های ژولیا و فاتو در حدود سال ۱۹۱۸ می‌باشد. امروزه مجموعه‌های ژولیا از معروف‌ترین شکل‌های فرکتالی می‌باشند. این مباحث، بیشتر به صورت موضوعات پراکنده و جدا از هم مطرح و بررسی می‌شدند. تا اینکه ریاضی‌دان لهستانی مندلبروت در سال ۱۹۷۹ مباحث بسیاری از موضوعات دیگر را تحت عنوان هندسه فرکتالی جمع‌بندی و به دنیای علم عرضه کرد و در سال ۱۹۸۲ با انتشار

کتاب معروف هندسه فرکتالی طبیعت، دوران شکوفایی هندسه فرکتالی آغاز شد. از این زمان به بعد، مطالعه راجع به فرکتال و کاربرد آن یکی از زمینه‌های تحقیقاتی فعال بوده است. فرکتال‌ها در مباحث مختلفی به کار برده شده‌اند: توصیف شکل اجسام طبیعی مانند ابرها، کوه‌ها، توصیف رشد بلورها، به دست آوردن الگویی برای شکست اجسام و فشردگی‌سازی تصویر رایانه‌ای از جمله مواردی هستند که هندسه فرکتالی در آنها به کار بسته شده است.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

- (الف) یک دنباله هندسی دنباله‌ای است که ..... میان جملات متوالی دنباله، ثابت است.  
 (ب) اگر  $a_n$  و  $a_m$  جملات  $m$ ام و  $n$ ام یک دنباله هندسی باشند، حاصل  $\frac{a_m}{a_n}$  برابر با  $r^{(.....)}$  است.  
 (پ) اگر مقدار نسبت مشترک جملات یک دنباله هندسی ..... باشد، دنباله افزایشی و اگر ..... باشد، دنباله کاهشی می‌باشد.  
 (ت) اگر  $x+3$  و  $x+2$  و  $x$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، مقدار  $x$  برابر ..... است.  
 (ث) مجموع ده جمله اول دنباله هندسی،  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{1}{10}$ ،  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{2}{5}$ ، برابر ..... است.

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) دنباله  $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$  یک دنباله هندسی است.  
 (ب) دنباله هندسی همان الگوهای غیرخطی هستند.  
 (پ) مجموع دنباله هندسی  $4096$  و  $\dots$  و  $16$  و  $4$  و  $1$  برابر  $5461$  می‌باشد.  
 (ت) اگر جملات یک دنباله هندسی  $k$  برابر شود، نسبت مشترک دنباله جدید  $k$  برابر می‌شود.  
 (ث) اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه:  $b^2 = a \times c$

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

- (الف) در یک دنباله هندسی جمله پنجم برابر  $48$  و جمله سوم برابر  $12$  می‌باشد. جمله اول این دنباله کدام است؟

۳ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۲ ۱

ب) مجموع چند جمله دنباله هندسی... و ۲۴ و ۱۲- و ۶ برابر ۱۰۲۶ است؟

پ) در یک دنباله هندسی مجموع هشت جمله اول  $\frac{5}{4}$  مجموع چهار جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$$\frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{1}{4}$$

ت) در یک دنباله هندسی رابطه  $\frac{a_7 \times a_4}{a_7} = 32$  را داریم. نسبت مشترک این دنباله چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4}$$

ث) در یک دنباله هندسی جمله سوم ۱۲ و جمله ششم آن ۹۶ است. جمله نهم این دنباله کدام است؟

$$678 \quad 768 \quad 876 \quad 867$$

۴ بین اعداد ۳ و ۱۹۲، پنج عدد چنان درج کنید که هفت عدد حاصل یک دنباله هندسی تشکیل دهند.

۵ در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. جمله اول، چند برابر جمله پنجم است؟

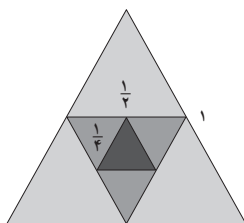
۶ دنباله هندسی  $2(-3)^{3k+4}, \dots, -6, 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}$  چند جمله دارد؟

۷ جمله پنجم و هشتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۳ و ۸۱ است. مجموع سی جمله اول آن را به دست آورید.

۸ در یک دنباله هندسی  $a_5 \times a_7 = 2$ ، جمله اول آن کدام است؟

۹ جمعیت یک شهر در سال ۱۳۹۶، ۳۵ هزار نفر است و پیش‌بینی می‌شود که سالیانه ۵ درصد به جمعیت شهر اضافه گردد. الف) جمعیت شهر را پس از یک، دو، سه و چهار سال از سال مبدأ ۱۳۹۶ به دست آورید؟ ب) آیا این یک دنباله هندسی است؟ چرا؟ پ) رابطه‌ای برای جمعیت شهر پس از  $n$  سال از سال مبدأ ۱۳۹۶ بیابید؟

۱۰ قیمت یک گوشی موبایل به دلیل استفاده از آن و پس از گذشت زمان کاهش می‌یابد. اگر قیمت اولیه این گوشی ۴ میلیون تومان باشد و قیمت آن در هر ماه ۲ درصد کاهش پیدا کند، الف) قیمت این موبایل پس از گذشت ۴ ماه چقدر می‌شود؟ ب) قیمت این موبایل پس از گذشت  $n$  ماه از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟



۱۱ اگر مطابق شکل مقابل در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱، وسط‌های اضلاع آن را به یکدیگر وصل کنیم و همین روند را ادامه دهیم، مجموع محیط‌های مثلث‌های به دست آمده پس از هشت مرحله چقدر است؟

۱۲ اگر  $x$  و  $y$  و  $z$  هم تشکیل دنباله حسابی و هم تشکیل دنباله هندسی دهند،  $x$  و  $y$  و  $z$  چه رابطه‌ای با هم دارند؟ اختلاف مشترک و نسبت مشترک در این دنباله چیست؟

۱۳ در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم  $-3^\circ$  و مجموع جملات چهارم و ششم  $81^\circ$  می‌باشد. جمله عمومی این دنباله را بیابید؟

۱۴ کارفرمایی به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرد دستمزد روز اول  $160^\circ$  تومان و تا پایان ۶ روز کاری هفته، هر روز دستمزد او را  $\frac{3}{4}$  برابر دستمزد روز قبل اضافه کند. مجموع دستمزدهای ۶ روز اول هفته این کارگر چقدر است؟

۱۵ جمعیت یک روستا ۱۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه  $\frac{1}{9}$  جمعیت سال قبل کاهش یابد، پس از ۴ سال چند نفر در این روستا زندگی می‌کنند؟

۱۶ سه عدد  $a$ ،  $b$  و  $c$  که مجموع آنها ۱۵ می‌باشد، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  تشکیل دنباله حسابی دهند، مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را تعیین کنید.

۱۷ چه عددی را باید به هر یک از عددهای ۱، ۷ و ۲۲ افزود تا عددهای حاصل، دنباله هندسی پدید آورند؟



## دنباله هندسی

## اهداف درس اول

- ۱ شناخت ارتباط میان مفاهیم الگوهای غیرخطی و دنباله هندسی.
- ۲ آشنایی با مفهوم دنباله هندسی و ویژگی های آن.
- ۳ توانایی در یافتن نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله هندسی.
- ۴ شناخت کاربرد مفهوم دنباله هندسی در برخی پدیده های دنیای واقعی.
- ۵ مهارت در حل مسائلی از دنیای واقعی مرتبط با مفهوم دنباله هندسی و تفسیر نمودار آنها.
- ۶ مهارت در یافتن مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی.

## روش تدریس

ورود به مبحث درس با مسئله مشهور «پارادکس زنو» آغاز شده، که مفهوم مجموع جملات دنباله هندسی در آن مستتر است. پارادکس به حکمی به ظاهر صحیح گفته می شود که منجر به تناقض می شود و یا با شهود مطابقت نمی یابند. برای ایجاد انگیزه و اینکه یادگیری اثربخش باشد، این مسئله با سؤالی از دانش آموزان مطرح شده است تا آنان به صورت عینی نتایج لازم را کسب نمایند.

در صفحه ۷۵، برای رسیدن به مفهوم دنباله هندسی و نشان دادن رفتار غیرخطی آن، فعالیت را با مسئله ای از دنباله حسابی مطرح نموده و با توجه به نمودارش، آن را تفسیر می کند. بهتر است برای این فعالیت که یادآوری مفاهیم الگوی خطی و دنباله حسابی و قواعد مربوط به آن است، در کلاس با روش پرسش و پاسخ با دانش آموزان گفت و گو شود تا زمینه یادگیری آنان برای درک مفاهیم جدید فراهم گردد. در فعالیت صفحه ۷۶، مسئله ای شبیه مسئله فعالیت صفحه ۷۵ مطرح شده است و نمودار آن نشان دهنده غیرخطی بودن رفتار تابع است و دنباله خاص دیگری به نام دنباله هندسی معرفی می شود.

هدف از دو فعالیت مطرح شده، نشان دادن تفاوت مفهوم دنباله حسابی و مفهوم دنباله هندسی است. در فعالیت صفحه ۷۵، تأکید شده که در هر ساعت مقدار ثابت  $۱۰^\circ$  میلی گرم از میزان دارو در بدن کم می شود و با نوشتن جملات دنباله  $۰^\circ$  و  $۱۰^\circ$  و  $۲۰^\circ$  و  $۳۰^\circ$  و  $۴۰^\circ$  و  $۵۰^\circ$  و  $۶۰^\circ$  و  $۷۰^\circ$  و  $۸۰^\circ$  و  $۹۰^\circ$  مشخص است که دنباله حسابی می باشد و نمودار نیز خطی بودن آن را نشان می دهد.

در فعالیت صفحه ۷۶، میزان دارو به نصف میزان اولیه از زمان مصرف کاهش می‌یابد، که به اصطلاح پزشکی، نیمه عمر آن یک ساعت است و با نوشتن جملات دنباله... و  $۷۸۱۲۵/۰$  و  $۱/۵۶۲۵$  و  $۳/۱۲۵$  و  $۶/۲۵$  و  $۱۲/۵$  و  $۲۵$  و  $۵۰$ ، و نیز با توجه به نمودار، غیر خطی بودن آن را نشان می‌دهد، زیرا اختلاف میان جملات متوالی آن ثابت نیست.

با توجه به نمودار فعالیت صفحه ۷۶، بعد از ۳ نیمه عمر، میزان دارو در بدن شخص کمتر از  $۲۰$  میلی گرم خواهد بود، همچنین میزان دارو در بدن شخص صفر نمی‌شود، چون در هر یک ساعت، میزان دارو در بدن شخص نصف می‌شود و کاهش می‌یابد ولی صفر نمی‌شود، بلکه به صفر نزدیک می‌شود.

در صفحه ۷۷، با توجه به نتیجه‌گیری از حل فعالیت‌ها، تعریف دنباله هندسی همراه با فرمول نسبت مشترک و جمله عمومی آن بیان می‌شود. برای درک بهتر مفهوم درس، سؤالاتی در کار در کلاس مطرح شده است. دانش‌آموزان با نتیجه‌گیری از حل سؤال قسمت ۱، می‌توانند به سؤال قسمت ۲ پاسخ دهند که به تأثیر نسبت مشترک،  $r$ ، بر جملات دنباله هندسی تأکید دارد.

### حل کار در کلاس صفحه ۷۷

۱

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = ۱$	$r = \frac{1}{3}$	$۱, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{۲۷}, \frac{1}{۸۱}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ $a_1 = ۱$	$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{۸۱}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{۸۱}, \frac{1}{۵۴}, \frac{1}{۳۶}, \frac{1}{۲۴}, \frac{1}{۱۶}$	$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ $a_1 = \frac{1}{۸۱}$	$a_n = \frac{1}{۸۱} \times (\frac{3}{2})^{n-1}$
$a_1 = ۴$	$r = -\frac{1}{2}$	$۴, -۲, ۱, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = (-\frac{1}{2})a_n$ $a_1 = ۴$	$a_n = ۴ \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$
$a_1 = ۱$	$r = \frac{1}{5}$	$۱, \frac{1}{5}, \frac{1}{۲۵}, \frac{1}{۱۲۵}, \frac{1}{۶۲۵}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$ $a_1 = ۱$	$a_n = (\frac{1}{5})^{n-1}$
$a_1 = ۱۰۰$	$r = \frac{1}{4}$	$۱۰۰, ۲۵, \frac{۲۵}{4}, \frac{۲۵}{۱۶}, \frac{۲۵}{۶۴}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ $a_1 = ۱۰۰$	$a_n = ۱۰۰ \times (\frac{1}{4})^{n-1}$

۲ اگر  $۰ < r < ۱$ ، دنباله کاهشی، اگر  $r > ۱$ ، دنباله افزایشی و اگر  $r = ۱$ ، دنباله ثابت است. در کاردر کلاس صفحه ۷۸، مسئله‌ای کاربردی در مورد هزینه استهلاک مطرح شده است. دانش‌آموزان با معنای استهلاک در کتاب اقتصاد آشنایی دارند. هدف از طرح این مسئله این است که دانش‌آموزان ارتباط میان مفاهیم ریاضی با علوم دیگر را درک کرده و یادگیری معنادار صورت گیرد. همچنین با حل آن، تفاوت دو مفهوم دنباله حسابی و دنباله هندسی را بهتر درک کنند.

### حل کاردر کلاس صفحه ۷۸

(الف)

$$V_1 = ۹۶۰۰۰۰ \times \frac{۹۰}{۱۰۰} = ۹۶۰۰۰۰ \times ۰/۹ = ۸۶۴۰۰۰ \quad V_2 = ۸۶۴۰۰۰ \times ۰/۹ = ۷۷۷۶۰۰$$

$$V_3 = ۷۷۷۶۰۰ \times ۰/۹ = ۶۹۹۸۴۰ \quad \dots$$

$$V_n = V_1 \times r^{n-1} = ۸۶۴۰۰۰ \times (۰/۹)^{n-1}$$

(ب)

$$V_1 = ۸۶۴۰۰۰ \xrightarrow{\times ۰/۹} V_2 = ۷۷۷۶۰۰ \xrightarrow{\times ۰/۹} V_3 = ۶۹۹۸۴۰ \xrightarrow{\times ۰/۹}$$

$$V_4 = ۶۲۹۸۵۶ \xrightarrow{\times ۰/۹} \dots$$

بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر، در اولین سال بعد از خرید آن است.

$$V_1 - V_2 = ۸۶۴۰۰ \quad V_2 - V_3 = ۷۷۷۶۰ \quad V_3 - V_4 = ۶۹۹۸۴ \quad \dots$$

خیر، زیرا به عدد ثابتی نمی‌رسیم و کاهش ارزش یخچال فریزر همچنان ادامه دارد.

ج) زیرا یک مقدار بزرگ‌تر از صفر (ارزش یخچال فریزر) را هر بار در عدد  $۰/۹$  ضرب می‌کنیم (تا  $۱۰$  بار)، بنابراین هیچ‌گاه صفر نخواهد شد. اگر هر سال به مقدار ثابت از ارزش یخچال فریزر کم شود، پس از مدتی ارزش آن صفر خواهد شد. قیمت یخچال فریزر یعنی  $۹۶۰۰۰۰$  را بر  $۱۰$  تقسیم کنیم، حاصل  $۹۶۰۰۰$  خواهد شد. اگر هر سال به مقدار ثابت  $۹۶۰۰۰$  از ارزش یخچال فریزر کم شود، پس از  $۱۰$  سال ارزش آن صفر می‌شود. بنابراین  $V_n = ۸۶۴۰۰۰ + (n-1) \times (-۹۶۰۰۰) = -۹۶۰۰۰n + ۹۶۰۰۰۰$

د) نصف ارزش یخچال فریزر  $۴۸۰۰۰۰ \div ۲ = ۹۶۰۰۰۰$  و با توجه به قسمت الف:  $V_n = ۸۶۴۰۰۰ \times (۰/۹)^{n-1}$

با جایگذاری اعداد طبیعی در  $n$  داریم:

:

$$V_5 = ۸۶۴۰۰۰ \times (۰/۹)^{4-1} = ۸۶۴۰۰۰ \times (۰/۹)^3 = ۵۱۰۱۸۳/۳۶$$

$$V_6 = ۸۶۴۰۰۰ \times (۰/۹)^{5-1} = ۸۶۴۰۰۰ \times (۰/۹)^4 = ۴۵۹۱۶۵/۰۲۴$$

بنابراین ۷ سال پس از خرید یخچال فریزر باید آن را بفروشد تا ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد.

ه) وقتی از جملات دنباله  $k$  واحد کسر شود، جملات این دنباله کوچک می شوند و ممکن است به صفر برسد، ولی وقتی  $k$  درصد از آن کسر شود، جملات دنباله کوچک می شوند ولی هیچ گاه به صفر نمی رسد و تنها به صفر نزدیک می شوند. وقتی از هر جمله دنباله،  $k$  واحد کسر شود، دنباله حسابی و وقتی از هر جمله دنباله،  $k$  درصد کسر شود، دنباله هندسی است.

### حل کار در کلاس صفحه ۷۹

پس از ۸ نیمه عمر یعنی : ساعت  $6 \times 8 = 48$

$$80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 2.5 \rightarrow 1.25 \rightarrow 0.625 \rightarrow 0.3125$$

$$\begin{cases} a_1 = 40 \\ \rightarrow a_n = 40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_8 = 40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 40 \times \frac{1}{128} = 0.3125$$

در فعالیت صفحه ۸۰، با استفاده از رابطه بازگشتی و ضابطه تابعی دنباله، میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص بیمار پس از  $n$  بار مصرف قرص را به دست می آورد و با جمع بندی از این فعالیت، رابطه مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی را نتیجه می گیرد.

کاردر کلاس صفحه ۸۰  
 الف)

$S_n$	زمان مصرف	تاریخ مصرف	$n$ تعداد مصرف
$S_1 = ۸۰$	... : بامداد	۱۵ بهمن	۱
$S_2 = \frac{1}{4}S_1 + ۸۰ = ۴۰ + ۸۰ = ۱۲۰$	... : ۸ صبح	۱۵ بهمن	۲
$S_3 = \frac{1}{4}S_2 + ۸۰ = ۶۰ + ۸۰ = ۱۴۰$	... : ۴ بعد از ظهر	۱۵ بهمن	۳
$S_4 = \frac{1}{4}S_3 + ۸۰ = ۷۰ + ۸۰ = ۱۵۰$	... : بامداد	۱۶ بهمن	۴
$S_5 = \frac{1}{4}S_4 + ۸۰ = ۷۵ + ۸۰ = ۱۵۵$	... : ۸ صبح	۱۶ بهمن	۵
$S_6 = \frac{1}{4}S_5 + ۸۰ = ۷۷/۵ + ۸۰ = ۱۵۷/۵$	... : ۴ بعد از ظهر	۱۶ بهمن	۶

$$S_{n+1} = ۸۰ + \frac{1}{4}S_n, \quad S_1 = ۸۰ \quad (\text{ب})$$

$$S_1 = A \quad (\text{ج})$$

$$S_2 = A + \frac{1}{4}S_1 = A + \left(\frac{1}{4}\right)A$$

$$S_3 = A + \frac{1}{4}S_2 = A + \frac{1}{4}\left(A + \frac{1}{4}A\right) = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A$$

$$S_2 = ۱۶۰ \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = ۱۲۰ \quad S_6 = ۱۶۰ \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6\right) = ۱۵۷/۵ \quad (\text{د})$$

## حل کاردر کلاس صفحه ۸۱

$$a = ۸۰, \quad r = \frac{1}{4} \quad (\text{الف})$$

$$a_n = ۸۰ \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \rightarrow a_3 = ۸۰ \times \left(\frac{1}{4}\right)^{3-1} = ۲۰ \quad (\text{ب})$$

$$S_n = 80 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow S_7 = 80 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^7}{1 - \frac{1}{2}} = 80 \times \frac{1 - \frac{1}{128}}{1 - \frac{1}{2}} = 140.$$

$a_7$ : میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از دو نیمه عمر است.

$S_7$ : میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از سه بار مصرف قرص است.

هدف از کار در کلاس صفحه ۸۲، تسلط یافتن دانش آموزان در محاسبه مجموع  $n$  جمله اول دنباله

هندسی می باشد.

### حل کار در کلاس صفحه ۸۲

۱

جملات دنباله	$a_1$ (جمله اول)	$r$ (نسبت مشترک)	$S_n$ مجموع $n$ جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^{10})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{14762}{19683}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^4)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{255}{768}$ $S_8 = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^8)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{65535}{196608}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_3 = \frac{\frac{2}{5}(1 - (\frac{1}{2})^3)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{10}$ $S_9 = \frac{\frac{2}{5}(1 - (\frac{1}{2})^9)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2044}{2560}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_6 = \frac{\frac{2}{5}(1 - (5)^6)}{1 - 5} = \frac{7812}{5}$

۲

الف) با توجه به نمودار، جملات دنباله :

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$r = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 2 \rightarrow a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_{10} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{256} \quad \text{ب)}$$

در صفحه ۸۳، پاسخ مسئله پارادکس زنو با عنوان مطلب خواندنی بیان شده است که به مفهوم مجموع بی شمار جملات دنباله هندسی اشاره دارد. هدف از آوردن این مطلب این است که الگویی در حالت کلی تر و به زبان ساده به دانش آموزان نشان داده شود تا آنان به تعمیم مفاهیم ریاضی فکر کنند.

### توصیه آموزشی

- در این درس، دستور مربوط به محاسبه مجموع جملات یک دنباله هندسی نامحدود (نسبت مشترک  $|r| < 1$ ) مدنظر نمی باشد و این مطلب باید در سؤالات ارزشیابی مورد توجه قرار گیرد.
- سطح دشواری سؤالات ارزشیابی کنترل شود و با توجه به مفاهیم آموزش داده شده و در محدوده مسائل و تمرینات کتاب درسی مطرح گردد.
- برای بهبود درک و مهارت های شناختی دانش آموزان در مورد موضوعات و مفاهیمی که در درس ارائه شده است، بهتر است روش یادگیری مشارکتی در کلاس به کار گرفته شود.
- یکی از راه های ایجاد تفکر ریاضی در دانش آموزان این است که آنان را ترغیب کنیم تا مسئله جدیدی از محیط پیرامون خود که مرتبط با مفاهیم درس است را بیابند و در کلاس مطرح کنند. مهم نیست که مسئله ارائه شده، ساده و ابتدایی باشد، بلکه مهم این است که برای فکر کردن به این موضوع وقت گذاشته باشند و این فکر تازه باشد.

## اشتباهات رایج دانش آموزان

ممکن است برای پیدا کردن نسبت مشترک جملات دنباله هندسی دچار اشتباه شوند. مثلاً در یک دنباله هندسی که چند جمله اول آن داده شده، برای به دست آوردن نسبت مشترک، به جای اینکه جمله دوم را بر جمله اول تقسیم کنند، به عکس جمله اول را بر جمله دوم تقسیم می کنند.

برخی بدفهمی های دانش آموزان در مورد عدم تشخیص درست نوع دنباله (حسابی، هندسی) در مسئله هایی از دنیای واقعی است، و به این دلیل می باشد که بعضی از آنان طوطی وار فرمول و قواعد ریاضی را حفظ می کنند، بدون اینکه درک درستی از مفاهیم درس داشته باشند. بهتر است به آنان گفته شود مفاهیمی که از دنباله ها آموختند، را با هم مقایسه کرده و تفاوت ها را شناسایی و در کلاس بیان کنند.

### حل تمرینات درس اول (صفحه ۸۴ کتاب)

۱ با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد.

$$1 \quad a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$2 \quad a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$$

$$3 \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1 \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$$

$$4 \quad a_n \quad a_n \quad a_1 = 1 \quad 1, 2, 4, \dots$$

۲ با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه  $a$  و  $b$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه  $a \times c = b^2$ . ( $b$  را واسطه هندسی میان  $a$  و  $c$  می نامند.)

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = r \\ \frac{c}{b} = r \end{cases} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow a \times c = b^2$$

۳ اگر  $x+3$  و  $x+2$  و  $x$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید.

$$(x+3)^2 = x(x+2) \rightarrow x^2 + 4x + 6 = x^2 + 2x \rightarrow x = -3$$

۴ سرطان از تکثیر بیش از حد سلول ها در بدن ایجاد می شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می شود. در



این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا  $۱۰^{۱۲}$  سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

$$۴۰\% = ۶۰\% - ۱۰۰\%$$

$$a_1 = ۱۰^{۱۲} \times \left(\frac{۴۰}{۱۰۰}\right) = ۰/۴ \times ۱۰^{۱۲}, a_n = a_1 r^{n-1} = (۰/۴ \times ۱۰^{۱۲}) \times \left(\frac{۴۰}{۱۰۰}\right)^{n-1} = ۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^n$$

$$a_3 = ۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^3 = ۴^3 \times ۱۰^9 = ۶۴ \times ۱۰^9$$

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی درمانی کمتر از  $۷ \times ۱۰^۶$  سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

$$a_n < ۷ \times ۱۰^۶$$

$$۱۰^{۱۲} (۰/۴)^n < ۷ \times ۱۰^۶$$

$$۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^{۱۳} = ۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^{۱۳} = ۶۷۱۰۸۸۶/۴ < ۷۰۰۰۰۰۰$$

۱۳ مرتبه باید شیمی درمانی شود.  $\rightarrow n = ۱۳$

۵) میان دو عدد  $a$ ،  $b$  و  $n$  عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از  $a$  و ختم به  $b$  یک دنباله

هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه  $r^{n+1} = \frac{b}{a}$  به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات  $(n+2)$  جمله است.)

$$b = a_{n+2} = a \times r^{n+2-1} = a \times r^{n+1}$$

$$\rightarrow b = a \times r^{n+1} \rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

۶) جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی

را به دست آورید.

$$a_3 = ۲۷$$

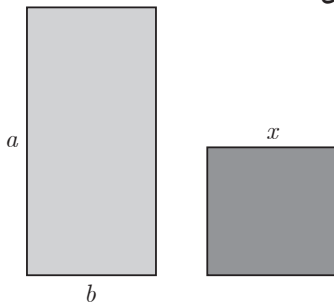
$$a_5 = ۲۴۳$$

$$\rightarrow \frac{a_1 r^2}{a_1 r^4} = \frac{۲۷}{۲۴۳} \rightarrow r^2 = ۹ \rightarrow r = \pm ۳$$

$$a_r = 27 \rightarrow a_1 r^2 = 27 \rightarrow a_1 (\pm 3)^2 = 27 \rightarrow a_1 = 3$$

$$a_6 = a_1 r^5 = 3 \times (\pm 3)^5 = 3 \times 243 = 729$$

۷ مستطیلی با اضلاع  $a$  و  $b$  مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع  $x$  هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟



الف)  $x$  و  $b$  و  $a$

ب)  $\sqrt{b}$  و  $x$  و  $a$

ج)  $x$  و  $a$  و  $b$

$$x^2 = a \times b$$

۸ یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب‌سنگ به جو زمین چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

$$100\% - 15\% = 85\%$$

$$a_n = a \times r^{n-1} \rightarrow a_n = 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^{n-1}$$

$$n = 6 \rightarrow a_6 = 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^{6-1} = 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^5 \approx 6655 / 58$$

۹ شخصی پدر و مادر، دو پدربزرگ و دو مادربزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و... دارد.

الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید).

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

... و ۸ و ۴ و ۲

الف)

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^{n-1+1} = 2^n$$

$$\rightarrow a_{10} = 2^{10} = 1024$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_{10} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2(1-2^{10}) = 2046 \quad \text{ب)}$$

۱۰ مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $۱ + ۴ + ۱۶ + \dots + ۴۰۹۶$

$$n = 7 \rightarrow S_7 = \frac{1(1-4^7)}{1-4} = 5461$$

ب)  $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$$n = 8 \rightarrow S_8 = \frac{1(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow S_8 = 0.3984$$

۱۱ نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی  $\frac{1}{2}$  است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

$$a_1 = 1536, \quad r = \frac{1}{2}, \quad a_n = 6$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \rightarrow 6 = 1536 \times (\frac{1}{2})^{n-1} \rightarrow (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{6}{1536} = \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^8} \rightarrow n-1 = 8 \rightarrow n = 9 \text{ جمله نهم}$$

$$S_9 = 1536 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^9}{1-\frac{1}{2}} = 1536 \times \frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 3066$$

۱۲ پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم

آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.

الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را  $n$  مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

ج) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟



[illegible]

ریشه  $n$ ام و توان گویا

## اهداف درس دوم

- ۱ درک مفهوم ریشه‌گیری و کاربرد آن در محاسبه ریشه‌های مختلف اعداد
- ۲ درک مفهوم توان‌های گویای اعداد حقیقی مثبت، ارتباط آن با مفهوم ریشه‌گیری و استفاده از این ارتباط برای حل مسائل مرتبط
- ۳ تعمیم قوانین مرتبط با توان‌های صحیح اعداد حقیقی برای توان‌های گویای اعداد حقیقی مثبت

## روش تدریس

دانش‌آموزان در پایه‌های قبل با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و ریشه‌های دوم و سوم اعداد و نحوه محاسبه آنها آشنا شده‌اند. آنها همچنین قواعد مرتبط با توان‌های صحیح اعداد و نحوه ساده کردن عبارت‌های توان‌دار را آموخته‌اند. بر همین اساس در ابتدا مروری بر آنچه دانش‌آموزان در گذشته درخصوص توان و ریشه یاد گرفته‌اند صورت می‌گیرد و سپس مفاهیم جدید ارائه می‌گردد.

به منظور مرور، دانش‌آموزان با انجام سؤال ۱ و ۲ فعالیت صفحه ۸۷، مطالب مرتبط با توان را مرور می‌کنند و با انجام سؤال ۳ فعالیت، به کمک مفهوم معادله و حل آن ضمن مرور مفهوم ریشه دوم و سوم اعداد و نحوه محاسبه آنها، با ریشه‌های  $n$ ام اعداد آشنا می‌شوند. در پایه‌های قبل نماد  $\sqrt{\quad}$  به عنوان ریشه دوم مثبت اعداد و نماد  $\sqrt[3]{\quad}$  به عنوان ریشه سوم اعداد معرفی شده است. بر همین اساس در این درس  $\sqrt[n]{a}$ ، برای  $n$  زمانی که زوج است به عنوان ریشه  $n$ ام مثبت عدد  $a$  و برای  $n$  در حالتی که فرد است به عنوان همان ریشه  $n$ ام عدد  $a$  معرفی می‌شود. در بخش پایانی فعالیت نیز دانش‌آموزان ریشه‌های  $n$ ام اعداد را در حالت کلی ملاحظه می‌کنند.

در ادامه، با انجام کار در کلاس صفحه ۸۹ و ۹۰ مطالب ارائه شده در فعالیت قبل مورد تمرین قرار می‌گیرد و سعی می‌شود تا مفاهیم ارائه شده در ذهن دانش‌آموزان تثبیت شود. دانش‌آموزان با این دو قاعده که  $\sqrt{a^2} = |a|$  و  $\sqrt[3]{a^3} = a$  در گذشته آشنا شده‌اند، در سؤال ۲ کار در کلاس با حل مثال‌هایی، این دو قاعده را به حالت کلی تعمیم می‌دهند و درک می‌کنند که در حالت کلی برای هر  $n \geq 2$  داریم:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است.} \\ a & n \text{ فرد است.} \end{cases}$$

قبل از انجام فعالیت صفحه ۹۱، دانش آموزان به عنوان نمونه با موقعیتی واقعی مواجه می شوند که در آن موقعیت برای مدل سازی یک موقعیت واقعی مجبوریم از توان های گویا استفاده کنیم و به این درک می رسند که در خیلی از موارد واقعی نیاز به استفاده از توان های غیر صحیح اعداد داریم و از این طریق به ضرورت آشنایی و استفاده از توان های گویای اعداد در محاسبات پی می برند.

با انجام فعالیت صفحات ۹۱، ۹۲ و ۹۳، دانش آموزان با توان های گویای اعداد حقیقی مثبت آشنا شده، با استفاده از مفهوم ریشه گیری به ارتباط بین توان های گویای اعداد و ریشه های  $m$ ام اعداد پی برده و با انجام مثال هایی نو، تبدیل اعداد توان دار به اعداد رادیکالی، را یاد می گیرند. همچنین در پایان فعالیت و در صفحه ۹۳، قواعدی را که در خصوص توان های صحیح اعداد یاد گرفته اند، به حالت کلی ترو برای توان های گویای اعداد حقیقی مثبت تعمیم می دهند.

در سؤال ۱ کاردرکلاس صفحه ۹۳ از دانش آموزان خواسته می شود تا عبارت های رادیکالی را به صورت عبارت های توان دار و برعکس نمایش دهند. در سؤال ۲ کاردرکلاس، حل مسئله ارائه شده قبل از فعالیت صفحه ۹۱ در خصوص لزوم استفاده از توان های گویا، در شرایط مختلف مورد انتظار است. در سؤال ۳ و ۴، به چگونگی ساده کردن اعداد و عبارت های توان دار می پردازد. در سؤال ۵ نیز توجه دانش آموزان به این نکته از تعریف توان های گویای اعداد جلب می شود که در این کتاب، توان های گویای اعداد فقط برای اعداد حقیقی مثبت قابل تعریف است و در خصوص اعداد حقیقی منفی نمی توان از توان های گویای اعداد استفاده کرد. همچنین انتظار می رود دانش آموزان به این درک برسند که با اینکه می توان هر عدد با توان گویا را به صورت یک عدد رادیکالی نمایش داد، ولی هر عدد رادیکالی را نمی توان در قالب عددی با توان گویا نمایش داد. به عنوان مثال نمی توان  $\sqrt[5]{-12}$  را به صورت  $\sqrt[5]{-12}$  نمایش داد.

## توصیه آموزشی

یکی از موقعیت های بسیار غنی که می تواند به بهبود یادگیری و عملکرد دانش آموزان منجر شود و درک روشنی از آنچه در ذهن دانش آموزان می گذرد به دبیران محترم ارائه کند، موقعیت طرح مسئله است. به همین دلیل پیشنهاد می شود حتماً همکاران گرامی از ارائه چنین موقعیت هایی در کلاس درس استفاده کنند. به عنوان مثال برای ارزیابی مناسب آنچه دانش آموزان در خصوص مفهوم توان می دانند بهتر است عبارت یا عددی توان دار بدسیم و از دانش آموزان بخواهیم که مسئله ای طرح کنند که جواب آن، عبارت یا عدد توان دار داده شده باشد و سپس آن را حل کنند.

موقعیت دیگری که می تواند به درک بهتر دانش آموزان کمک کند، سؤال های باز پاسخ هستند که بیش از یک پاسخ درست دارند. توصیه می شود همکاران عزیز همانند محتوای کتاب از سؤالات باز پاسخ برای

ارائه تکلیف و انجام ارزشیابی استفاده کنند.

درک ضرورت استفاده از توان‌های غیر صحیح اعداد در موقعیت‌های واقعی روزمره و در ادامه مفهوم بخشی توان‌های غیر صحیح اعداد، کار دشواری است و محقق شدن آن نیاز به پشتیبانی مناسب معلم دارد. به همین منظور، پیشنهاد می‌گردد همکاران محترم با ارائه مثال‌ها و نمونه‌های واقعی از زندگی روزمره تأکید بیشتری بر کاربرد این مفهوم در زندگی روزمره داشته باشند که در نهایت می‌تواند منجر به درک بهتر این مفهوم شود.

این درس ضمن اینکه به معرفی مفهوم ریشه‌های  $m$ ام اعداد و توان‌های گویا می‌پردازد و قرار است دانش‌آموزان در این درس با این مفاهیم و نحوه کاربرد آنها در مسائل واقعی آشنا شوند، همچنین قصد دارد پیش‌نیازهای لازم برای درس بعدی یعنی توابع نمایی را مهیا کند. به همین دلیل به دبیران گرامی توصیه می‌شود در ارائه مسائل و تمرین به دانش‌آموزان، فراتر از سؤال‌های ارائه شده در این درس عمل نکنند و سؤالات ارائه شده در حد سؤالات کتاب باشند. همچنین تمامی توان‌ها و مسائل ارائه شده در این درس، درخصوص توان‌های گویای اعداد حقیقی مثبت است و به توان‌های غیر گویای اعداد (توان‌های اصم یا گنگ) حقیقی مثبت پرداخته نشده است، بنابراین پرداختن به توان‌های اصم یا گنگ اعداد در این درس به هیچ وجه مجاز نمی‌باشد.

### بدهمی‌های رایج دانش‌آموزان

یکی از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در این درس، تعمیم روابط خلاصه کردن ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار، در حالتی که توان‌ها یا پایه‌ها با هم برابرند، به جمع و تفریق این اعداد است. به همین دلیل در مرور این قواعد و همچنین تعمیم این قواعد از توان‌های صحیح اعداد به توان‌های حقیقی اعداد، توجه دانش‌آموزان به این نوع بدفهمی و بحث درخصوص آن، جهت اجتناب از این نوع درک نادرست، بسیار ضروری است.

### حل تمرینات درس

۱ با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt[4]{5^2}$ ،  $\sqrt[6]{5^3}$  با هم برابرند.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

۲ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.  $(a)$ ،  $m$  و  $n$  اعداد حقیقی مثبت‌اند.

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})} = 3^{(\frac{2}{6} + \frac{1}{6})} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} = 5^0 = 1$$

$$8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}} = 2^2$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^2$$

$$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3^2}{2^2}$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-2} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$3^{5/24} \times 3^{5/24} = 3^1 = 3$$

$$(m^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^2)^{\frac{1}{3}} = (m^{\frac{3}{2}} n^1)(mn^{\frac{2}{3}}) =$$

$$m^{\frac{5}{2}} n^{\frac{5}{3}} = (mn)^{\frac{5}{6}}$$

۳ در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار  $x$  را مشخص کنید.

$$8^x \times 9^5 = 72^5 \Rightarrow 8^x \times 9^5 = 8^5 \times 9^5 \Rightarrow 8^x = 8^5 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

$$(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^9 \Rightarrow (0/36)^{x-2} = (0/36)^9 \Rightarrow x-2=9 \Rightarrow x=11$$

$$(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8 \Rightarrow x^5 \times 15^3 = 3^8 \times 5^8 \Rightarrow \frac{x^5 \times \cancel{15^3}}{\cancel{15^3}} = \frac{15^8}{15^3} \Rightarrow$$

$$x^5 = 15^5 \Rightarrow x = 15$$

۴ همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع  $r$  با استفاده از فرمول  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  ( $V$  حجم کره) به‌دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم  $V$  را از فرمول زیر به‌دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{3V}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \Rightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$



ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن  $\frac{32\pi}{3}$  است، به دست آورید.

$$r = \left( \frac{3 \times \frac{32\pi}{3}}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{\cancel{3}^1 \cancel{32}^1 \pi}{\cancel{4}^1 \pi} \right)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = 2$$

۵ اگر  $D$  قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع  $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$  (طول  $L$ ، عرض  $W$  و ارتفاع جعبه  $H$  به دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه  $D$  را به دست آورید.

$$D = (12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (144 + 16 + 9)^{\frac{1}{2}} = (169)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13m$$

ب) اگر اندازه  $L=W=H=1m$  باشد، اندازه  $D$  را به دست آورید.

$$D = (1+1+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}m$$

## تابع نمایی

## اهداف درس سوم

- ۱ آشنایی با مفهوم تابع نمایی
- ۲ مدل سازی بعضی از مسایل واقعی با استفاده از تابع نمایی
- ۳ مقایسه توابع نمایی  $f(x) = a^x$  برای دو حالت  $0 < a < 1$  و  $a > 1$
- ۴ مقایسه تابع نمایی با تابع چند جمله ای
- ۵ پیدا کردن مقدار تقریبی تابع نمایی  $f(x) = a^x$  برای  $x$  های گویا
- ۶ آشنایی با معادلات کلی رشد و زوال نمایی و حل این معادلات

## استفاده از ابزار و تکنولوژی

استفاده از ماشین حساب برای انجام محاسبات تقریبی با عددهای بزرگ و یا عددهای گویا، بخشی از کار می باشد. همچنین معرفی نرم افزار «جئوجبرا» به دانش آموزان توصیه می گردد که اولاً با ویژگی های این نرم افزار آشنا شوند و ثانیاً از قابلیت های این نرم افزار در رسم توابع نمایی استفاده کنند. به عنوان نمونه، می توانند تابع  $f(x) = a^x$  را برای مقادیر مختلف  $a$ ، رسم نمایند و با مقایسه نمودارهای آنها، بتوانند به سؤالات مطرح شده در متن درس و مقایسه آنها با یکدیگر، پاسخ دهند.

## روش تدریس

درس اول با یک فعالیت در مورد یک بازی رایانه ای از تولیدات «بنیاد ملی بازی های رایانه ای» شروع می شود. برای معرفی تابع  $y = 3^x$  سه مرحله در نظر می گیریم. ابتدا فرض می کنیم دامنه اعداد  $x$  همه اعداد طبیعی اند. برای این منظور هر مرحله از بازی مثال خیلی خوبی است، زیرا در هر مرحله امتیاز سه برابر می شود و از این رو مقدار تابع در مرحله  $n$ ام از رابطه  $f(x) = 3^x$  پیروی می کند. از دانش آموز خواسته می شود تا امتیاز را در مرحله ۴ یا بالاتر پیدا کند که به طور تجربی او به این نتیجه خواهد رسید که باید از ضابطه تابع برای یافتن این مقدار استفاده کند که در فعالیت قبل آن را پیدا کرده است اما هنوز نمی توانیم تابع را رسم کنیم زیرا دامنه تابع  $f(x) = 3^x$  کل اعداد حقیقی است. بنابراین در پایان فعالیت اول تنها به رسم نقاط با دامنه اعداد طبیعی اکتفا شده است.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

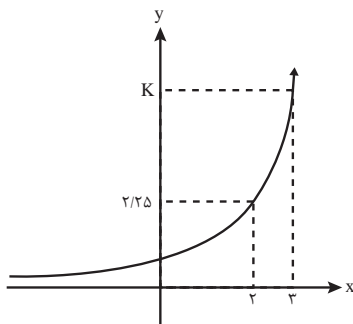
۱ در کدام یک از جدول‌های زیر، تابع داده شده نمایی است؟

$x$	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱

$x$	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵

۲ اگر در تابع نمایی با ضابطه  $f(x)=a^x$  داشته باشیم  $f(2)=32$  در این صورت مقدار  $a$  را مشخص کنید.

۳ اگر نمودار تابع نمایی  $f(x)=a^x$  به صورت زیر باشد مقدار  $k$  را مشخص کنید.



۴ اگر  $f(x)=a^x$  و  $f(2)=1$  باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف)  $f(8)+f(4)$       ب)  $3f(1)+2f(0)$

## فعالیت صفحه ۹۶

امتیازات یک بازی رایانه‌ای را در نظر بگیرید که در آن فرض بر این است که در هر مرحله امتیازات سه

برابر می‌شود. با امتیاز ۱ وارد بازی می‌شویم. یعنی  $f(0)=1$

۱ فکر می‌کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟

$f(4)=81$

جدول ۱

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی	
$3^0=1$	۰	$\searrow \times 3$
$3^1=3$	۱	$\searrow \times 3$
$3^2=9$	۲	$\searrow \times 3$
$3^3=27$	۳	$\searrow \times 3$
$?=81$	۴	$\searrow \times 3$
۲۴۳	$?=5$	$\searrow \times 3$
$?=729$	۶	$\searrow \times 3$
$?=2187$	۷	$\searrow \times 3$
$?=6561$	۸	$\searrow \times 3$
$?=19683$	۹	$\searrow \times 3$
$?=59049$	۱۰	

۲ در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

با توجه به جدول، پس از ۸ مرحله امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد.

۳ آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به‌دست آورید.

در هر مرحله میزان امتیازها سه برابر مرحله قبل است.

با توجه به رابطه به‌دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله  $n$ ام را به‌دست آورید.

امتیاز کسب شده در مرحله دهم  $59049$  و در مرحله بیستم  $3486784401$  و در مرحله  $n$ ام  $3^n$  است.

## فعالیت صفحه ۹۷

در دومین فعالیت این درس، هدف گسترش دامنه تابع نمایی  $f(n)=2^n$  است.

با پرکردن اعداد جدول نقاطی از نمودار تابع مشخص می‌شوند. سرانجام، به‌صورت دستوری به دانش‌آموز آموزش داده می‌شود که اگر نقاط بیشتری از این تابع را داشته باشد که این نقاط شامل نقاط گویا و اصم است، شکل این تابع شبیه نموداری است که در صفحه ۹۸ رسم شده است. برای اینکه دانش‌آموز متوجه باشد که دامنه این تابع اعداد حقیقی است، در ادامه این فعالیت از وی خواسته می‌شود با استفاده از

ماشین حساب مقدار تقریبی  $2\frac{1}{2}$  و  $2\frac{3}{4}$  را پیدا کند. همچنین یکی از اهداف دیگر این فعالیت، آموزش این مطلب است که نمودار تابع  $y=a^x$  هرگز محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

### فعالیت صفحه ۹۸

الف) در این فعالیت از دانش آموز می‌خواهیم با استفاده از ماشین حساب نمودار تابع  $y=3^x$  را با استفاده از نقاط داده شده رسم نماید.

ب) در این قسمت می‌خواهیم دانش آموز به این درک برسد که با استفاده از نمودار تابع نمایی می‌توانیم توان‌های غیر صحیح اعداد را به صورت تقریبی به دست آوریم.

پ) در این قسمت دانش آموز به این درک می‌رسد که نمودار تابع  $y=a^x$  همواره از نقطه  $(0,1)$  می‌گذرد. همچنین با استفاده از نمودار دانش آموز به این درک می‌رسد که اگر  $1 < b < a < c$ ؛ برای  $x > 0$  رابطه  $b^x < a^x < c^x$  و برای  $x < 0$  رابطه  $c^x < a^x < b^x$  برقرار می‌باشد.

### فعالیت صفحه ۱۰۰

در این فعالیت دانش آموز از طریق تازدن یک ورق کاغذ نمودار تابع  $y=a^x$  را برای  $0 < a < 1$ ،  $\left(a = \frac{1}{2}\right)$  برای  $x > 0$  بررسی می‌کند.

تعداد تازدن‌ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	$\frac{1}{16}$ ؟
۵ ؟	$\frac{1}{32}$
⋮	⋮
۸	؟
۱۰ ؟	$\frac{1}{1024}$

## فعالیت صفحه ۱۰۱

$x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y$	محاسبه $y$ با ماشین حساب تا سه رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-۲}$	۴	۴
$-\frac{۳}{۲}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{۳}{۲}}$	$۲\sqrt{۲}$	۲/۸۲۸
-۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-۱}$	۲	۲
$-\frac{۱}{۲}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$	$\sqrt{۲}$	۱/۴۱۴
۰	$\left(\frac{1}{2}\right)^۰$	۱	۱
$\frac{۱}{۲}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{۱}{۲}}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰/۷۰۱
۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^۱$	$\frac{۱}{۲}$	۰/۵
$\frac{۳}{۲}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{۳}{۲}}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۴}$	۰/۳۵۳
۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^۲$	$\frac{۱}{۴}$	۰/۲۵

این فعالیت بررسی نمودار تابع  $y=a^x$  برای  $۰< a < ۱$ ،  $\left(a=\frac{1}{۲}\right)$  برای  $x \in \mathbb{R}$  از طریق نقطه‌یابی به

کمک ماشین حساب می‌باشد. در این فعالیت علاوه بر رسم نمودار تابع  $\left(-\right)$  دانش‌آموز باید نمودار

تابع  $y=2^x$  را رسم نموده و تفاوت‌ها و شباهت‌های این دو نمودار را درک نماید. (دو نمودار حاصل را با هم مقایسه نماید.)

### کار در کلاس صفحه ۱۰۲

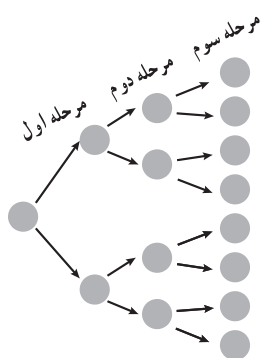
در این کار در کلاس دانش‌آموز رسم نمودار توابع  $y=a^x$ ،  $(a>1)$  و  $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$  و مقایسه نمودار آنها، قرینه بودن این دو نمودار نسبت به محور عرض‌ها را درک می‌نماید.

## توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که از دادن تمرین‌های زیاد پرهیز شود و در عوض تمرین‌ها و مثال‌های کتاب با دقت بیشتری مورد بحث و بررسی قرار گیرد. بسیاری از اهداف و مسائلی که در کتاب‌های کمک آموزشی مورد بررسی قرار می‌گیرند از اهداف این فصل نیست و از مطرح کردن آنها در کلاس خودداری شود.

## تمرین

۱ در پژوهشکدهٔ رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچهٔ قلب را به‌وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده  $2^{\circ}48$  سلول خواهد شد؟

پاسخ: ۱۱ مرحله

ب) در مرحلهٔ هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

پاسخ: ۲۵۶

ب) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

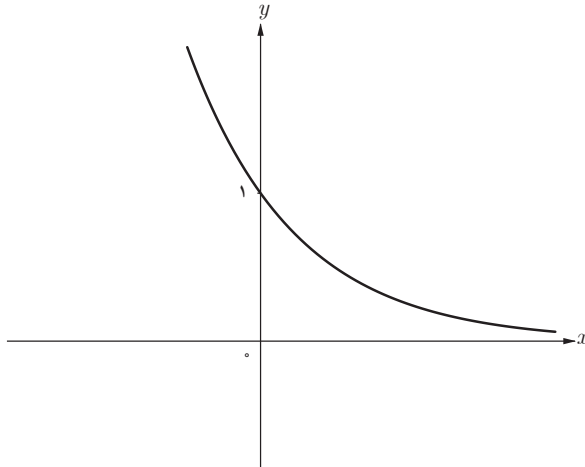
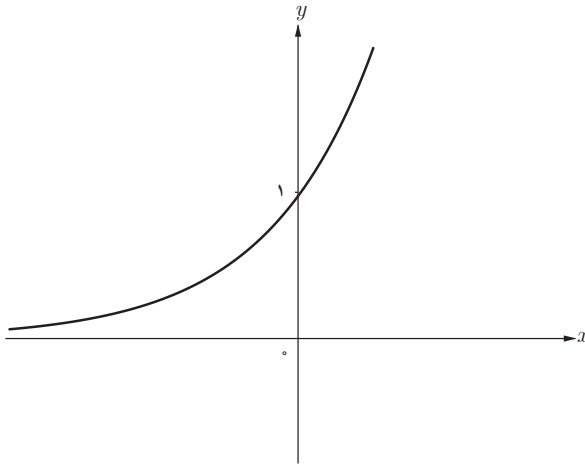
در هر مرحله تعداد سلول‌ها دو برابر تعداد سلول‌های مرحله قبل است.

۲ یک نمونهٔ واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

پاسخ: در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیز کننده‌ای قرار دارد که حدود یک چهارم از ناخالصی‌ها

را حذف می‌کند بنابراین سه چهارم ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اکنون اگر در هر مرحله یک فیلتر اضافه کنیم ناخالصی‌های باقی مانده در هر مرحله از الگوی تابع نمایی تابع  $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$  پیروی می‌کند.

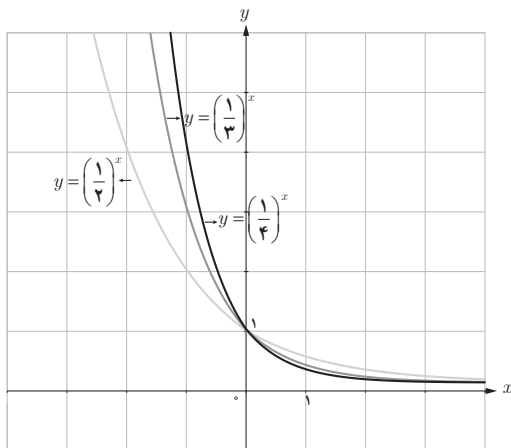
۳ در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع  $y = 4^x$  و  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



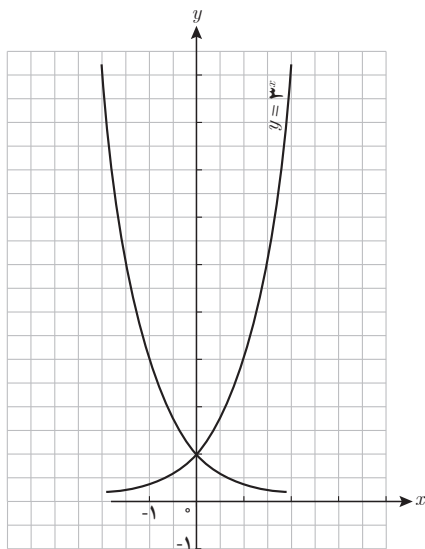
پاسخ: نمودار پایین نمودار تابع  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  و نمودار بالا مربوط به تابع  $y = 4^x$  می‌باشد.



۴ نمودار توابع  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  و  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمارید.



۵ نمودار توابع  $y = 3^x$  و  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.



پاسخ: نمودار این دو تابع نسبت به محور عرض‌ها قرینه یکدیگرند. نمودار تابع  $y = 3^x$  به شدت افزایشی و نمودار تابع  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  به شدت کاهش‌ی است.

## رشد و زوال نمایی

### مطالبی برای دیران

رشد و زوال: نرخ رشد یا زوال برخی از کمیت‌ها متناسب با مقدار آن کمیت در هر لحظه می‌باشد.

بنابراین اگر مقدار کمیت را در هر لحظه با  $x(t)$  نشان دهیم، داریم:  $\frac{dx}{dt} = kx$

از معادله دیفرانسیل  $\frac{dx}{dt} = kx$  داریم:  $\frac{dx}{x} = k dt$  بنابراین  $\int \frac{dx}{x} = k \int dt$  لذا  $\ln x = kt + c$  لذا  $x(t) = e^c e^{kt}$

با توجه به رابطه  $x_0 = e^c$  خواهیم داشت  $x(t) = x_0 e^{kt}$

رابطه  $x(t) = x_0 e^{kt}$  را در حالتی که تابع  $x$  پیوسته یا گسسته باشد می‌توانیم به کار ببریم.

در حالت  $r$  درصد رشد علاوه بر رابطه  $x(t) = x_0 e^{kt}$  می‌توان مقدار  $x(t)$  را از رابطه  $x(t) = x_0 (1+r)^t$  به دست آورد.

همچنین در حالت  $r$  درصد زوال می‌توان مقدار  $x(t)$  را از رابطه  $x(t) = x_0 (1-r)^t$  به دست آورد.

برای درک ارتباط بین دو رابطه  $x(t) = x_0 e^{kt}$  و  $x(t) = x_0 (1+r)^t$  کافی است یک مثال مطرح کرده و آن را از دو روش به دست آوریم.

مثال: استخری حداکثر ظرفیت ۲۰۰۰۰۰ عدد ماهی را دارد، اگر تعداد ماهی‌ها در حال حاضر ۲۰۰ باشد

و آهنگ رشد تعداد آنها ۲٪ در سال باشد پس از چند سال تعداد ماهی‌ها به ۲۰۰۰۰۰ می‌رسد؟

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 x_0 \\ x_1 = x_0 e^k \end{cases} \Rightarrow x_0 e^k = 1/2 x_0 \Rightarrow e^k = 1/2$$

$$x(t) = x_0 e^{kt} \Rightarrow x(t) = x_0 (1/2)^t \Rightarrow x(t) = 200 (1/2)^t$$

اکنون از تساوی  $200 (1/2)^t = 200000$  داریم:  $t = 25/25$

ملاحظه می‌شود  $e^{kt}$  همان  $(1+r)^t$  می‌باشد.

دقت داشته باشیم اثبات رابطه  $x(t) = x_0 (1+r)^t$  در کتاب درسی یک اثبات استقرایی است.

اصطلاحاتی در زمینه رشد و زوال که دیر باید آنها را بشناسد شامل «میزان رشد» و «اندازه جمعیت» و

«میزان رشد نسبی» و «میزان تحلیل نسبی آهنگ رشد تعداد و آهنگ رشد جمعیت» و ... هستند.

## نمونه سؤال‌های ارزشیابی

- ۱ نرخ افزایش قیمت لوازم التحریری در ایران سالی  $10\%$  است. تعیین کنید دو سال دیگر خودکار  $50$  تومانی چه قیمتی خواهد داشت؟
- ۲ استخری حداکثر ظرفیت  $20000$  عدد ماهی را دارد، اگر تعداد ماهی‌ها در حال حاضر  $200$  باشد و آهنگ رشد تعداد آنها  $2\%$  در سال باشد پس از چند سال تعداد ماهی‌ها به  $20000$  می‌رسد؟
- ۳ مواد غذایی روی زمین حداکثر برای  $40$  میلیارد نفر می‌باشد. در شروع سال  $1990$  میلادی جمعیت تقریبی زمین  $5/2$  میلیارد نفر بوده است. اگر جمعیت به‌طور نمایی با ضریب ثابت  $2$  درصد در سال رشد کند چه زمانی جمعیت به  $40$  میلیارد نفر خواهد رسید؟
- ۴ جمعیت شهری در سال  $1375$ ،  $10$  میلیون و در سال  $1395$ ، جمعیت آن  $15$  میلیون برآورد شده است، در سال  $1415$  جمعیت شهر را مشخص کنید.

### فعالیت صفحه ۱۰۳

در این فعالیت دانش‌آموز سرمایه احسان را با توجه به  $14$  درصد سود علی‌الحساب در هر سال محاسبه می‌کند.

مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی	سن احسان
$10,000,000$ تومان	۱۷
$10,000,000 + 0/14 \times 10,000,000 = 11,400,000$	۱۸
$11,400,000 + 0/14 \times 11,400,000 = 12,996,000$	۱۹
$\vdots$	$\vdots$
$19,254,145 + 0/14 \times 19,254,145 = 21,949,972$	۲۳

سرمایه علی‌الحساب، یک سال پس از سرمایه‌گذاری برابر:

$$10,000,000 + 10,000,000 \times 0/14 = 10,000,000 \times 1/14$$

همچنین دو سال پس از سرمایه‌گذاری:

$$(10,000,000 \times 1/14) + (10,000,000 \times 1/14) \times 0/14 \\ = 10,000,000 \times 1/14 (1 + 0/14) = 10,000,000 \times 1/14^2$$

بنابراین با یک استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم سرمایه علی‌الحساب،  $t$  سال پس از سرمایه‌گذاری برابر

$$10,000,000 \times 1/14^t \text{ می‌باشد.}$$

## کار در کلاس صفحه ۱۰۴

میلیارد نفر  $9/420 = 5/2(1+0/02)^{30} \approx$  جمعیت کره زمین پس از ۳۰ سال  
 میلیارد نفر  $10/400 = 5/2(1+0/02)^{35} \approx$  جمعیت کره زمین پس از ۳۵ سال  
 میلیارد نفر  $20/797 = 5/2(1+0/02)^{40} \approx$  جمعیت کره زمین پس از ۴۰ سال  
 میلیارد نفر  $43/992 = 5/2(1+0/02)^{45} \approx$  جمعیت کره زمین پس از ۴۵ سال

## تمرین

۱ در یکی از فعالیتهای بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهامداران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟ پاسخ:

$40,000,000 \times 1/141 = 148,288,852$  سرمایه پس از ده سال  
 $148,288,852 - 40,000,000 = 108,288,852$  افزایش سرمایه پس از ده سال

۲ جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟ پاسخ:

$1,000,000 \times 1/061 = 17,908,476$  جمعیت شهر پس از ده سال

۳ جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها با موش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۷۸۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

جمعیت موش‌ها پس از	
یک سال	$23786 \times 0.975^1 = 23191$
دو سال	$23786 \times 0.975^2 = 22611$
سه سال	$23786 \times 0.975^3 = 22046$
چهار سال	$23786 \times 0.975^4 = 21495$
پنج سال	$23786 \times 0.975^5 = 20957$
شش سال	$23786 \times 0.975^6 = 20433$
هفت سال	$23786 \times 0.975^7 = 19922$
هشت سال	$23786 \times 0.975^8 = 19424$
نه سال	$23786 \times 0.975^9 = 18939$
ده سال	$23786 \times 0.975^{10} = 18465$

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

جمعیت گربه‌ها پس از	
یک سال	$15786 \times 1.018 = 16070$
دو سال	$15786 \times 1.018^2 = 16359$
سه سال	$15786 \times 1.018^3 = 16653$
چهار سال	$15786 \times 1.018^4 = 16953$
پنج سال	$15786 \times 1.018^5 = 17258$
شش سال	$15786 \times 1.018^6 = 17569$
هفت سال	$15786 \times 1.018^7 = 17885$
هشت سال	$15786 \times 1.018^8 = 18207$
نه سال	$15786 \times 1.018^9 = 18535$
ده سال	$15786 \times 1.018^{10} = 18869$

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟

پاسخ: سال دهم

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟

پاسخ: در سال نهم (یکی از روزهای سال) جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شوند.

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

پاسخ: جمعیت موش‌ها رو به نابودی می‌رود و جمعیت گربه‌ها افزایش می‌یابد.





مسلان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ - گروه دسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تالیف کتاب های دسی عمومی و متوسط نظری